理论数学前沿
2019 年 12 月第 1 卷第 2 期

Analysis of set theory model based on model theory

Yu Liang

Guizhou Institute of engineering application technology, Bijie

Abstract: New set theory paradox is given in this paper. The existence of a set theory model is proved, where exists an infinite descending outer sequence with respect to ∈ relation of the model. This paper also proves that this kind of sequences may be inserted into well-ordered sets and classes like ω, ω1 , the class of all ordinal numbers ON and the class of all cardinal numbers N of the new model. It is also possible to insert such a sequence into the end section of an uncountable ascending sequence with respect to ∈ relation of the model like ω1. This paper for the first time defines and gives an example for an outer set that is not an inner set in a set theory model.

Key words: unwell-founded; set theory model; outer set; inner set

Received: 2019-11-01; Accepted: 2019-11-21; Published: 2019-12-13

文章引用：余亮．基于模型论的非良基性的集合论模型分析［J］．理论数学前沿，2019，1（2）：40-50.
https://doi.org/10.35534/tms.

基于模型论的非良基性的集合论模型分析

余 亮

贵州工程应用技术学院，毕节

邮箱：yuliang966037@163.com

摘　要：给出一个新的集合论悖论。用模型论方法证明了非良基性的集合论模型的存在性。这个模型中存在对∈关系下降的无限元素外序列。还证明可以存在集合论模型，其中 ω，ω_1 等集合，ON 和 N 等类的内部都存在对∈关系无限递降的元素外序列。这种对∈关系是无限递降的外序列还可以插入于一个没有可数共尾的对∈是上升的序列的后面，插入后成为同名集合的一部分。用这种模型第一次定义并给出了外集合不是内集合的例子。

关键词：非良基性；集合论模型；外集合；内集合

收稿日期：2019-11-01；录用日期：2019-11-21；发表日期：2019-12-13

1　集合论的新悖论

很多人认为在一个集合论模型中的序数从 0，1，2…，n…开始，下面的第一个序数是 ω。接下来的序数是：ω+1，。然后是 2ω，…，3ω，…，ωω…，直到 ω1，ω2…，ωω。它们被认为是最遵守良基性原则的。也就是说在序数中不存在集合序列 f，f 是 ω 上的函数，使得 f‘（n+1）∈ f‘n，f‘n ∈ ω，这里面 f 是一个序数的序列。实际的情况却恰好相反。我们用模型论的方法证明了非良基的集合论模型的存在性，也就是说存在集合论模型，其中存在对∈关系是下降的无限元素外序列。我们还证明了可以存在集合论模型其中 ω，ω1 等集合，ON 和 N 等类的内部都存在着对∈关系是无限递降的元素外序列。这种对∈关系是无限递降的元素外序列还可以插入于一个没有可数共尾的对∈是上升的序列的后面，插入之后成为同名集合的一部分。这个悖论说明了集合论公理中关于良基性的规定并不能限制集合论模型一定是良基的。利用这种模型我们还第一次定义并且给出了外集合不是内集合的例子。下面我就来研究这种模型。

集合论是一切数学的基础，所有数学对象都可以用集合论来定义，因此我们必须用集合论来研究集合论。在进入形式集合论之前我们需要一个普通集合论模型来作为讨论的环境。我们承认所有普通集合论中的定理。例如：所有在大学课本中常见的集合论定理（其中也包括实数集合是不可数的，序数类是良序的等等）。文中经常提到普通自然数就是我们工作环境中的自然数，要将它们与模型中的自然数区分开来。

2　良基性定理与非良基的集合论模型

我们知道良基性是集合论的重要基础。为了要更好地讨论良基性我们在这里节引了 God ∈ l 的形式集合论系统 [1]。我们使用这个系统是因为它比其他的系统简洁，并且够用。

集合论的语言 L 含有 2 个一元关系 $\mathfrak{LFG}$ 和一个二元关系 X ∈ Y，大写英文字母 X，Y，Z…表示类，小写英文字母 x，y，x，…表示集合，整个系统叫做

29g。它由以下 5 组公理来组成：

A 组.

1) $\mathfrak{Cls}(x)$.

2) $(X \in Y) \rightarrow \mathfrak{M}(X)$.

3) $(\forall u)[(u \in X) \leftrightarrow (u \in Y)] \rightarrow (x \equiv y)$.

4) $(\forall xy)(\exists z)[(u \in z) \leftrightarrow ((u \equiv x) \vee (u \equiv y))]$.

定义 A1 $\mathfrak{Pr}(X) \leftrightarrow \neg \mathfrak{M}(X)$.

定义 A2 $(u \in \{xy\}) \leftrightarrow ((u \equiv x) \vee (u \equiv y))$.

定义 A3 $\{x\} = \{xx\}$.

定义 A4 $\langle xy \rangle = \{\{x\}\{xy\}\}$.

类似地我们可以定义$\langle x \rangle = x$，$\langle xyz \rangle = \langle x \langle yz \rangle \rangle$和$\langle x_1 x_2 \cdots x_n \rangle = \langle x_1 \langle x_2 \cdots x_n \rangle \rangle$.

定义 A5 $(X \subset Y) \leftrightarrow (\forall u)[(u \in X) \rightarrow (u \in Y)]$.

定义 A6 $\mathfrak{Em}(X) \leftrightarrow (\forall u) \neg (u \in X)$.

定义 A7 $\mathfrak{Ex}(X, Y) \leftrightarrow (\forall u) \neg [(u \in X) \wedge (u \in Y)]$.

定义 A8 $\mathfrak{Un}(X) \leftrightarrow (\forall uvw)[((\langle v, u \rangle \in X) \wedge (\langle w, u \rangle \in X)) \rightarrow (v \equiv w)]$.

B 组.

1) $(\exists A)(\forall xy)[(\langle xy \rangle \in A) \leftrightarrow (x \in y)]$.

2) $(\forall AB)(\exists C)(\forall u)[(u \in C) \leftrightarrow ((u \in A) \wedge (u \in B))]$.

3) $(\forall A)(\exists B)(\forall u)[(u \in B) \leftrightarrow \neg (u \in A)]$.

4) $(\forall A)(\exists B)(\forall x)[(x \in B) \leftrightarrow (\exists y)(\langle yx \rangle \in A)]$.

5) $(\forall A)(\exists B)(\forall xy)[(\langle yx \rangle \in B) \leftrightarrow (x \in A)]$.

6) $(\forall A)(\exists B)(\forall xy)[(\langle xy \rangle \in B) \leftrightarrow (\langle yx \rangle \in A)]$.

7) $(\forall A)(\exists B)(\forall xyz)[(\langle xyz \rangle \in B) \leftrightarrow (\langle yzx \rangle \in A)]$.

8) $(\forall A)(\exists B)(\forall xyz)[(\langle xyz \rangle \in B) \leftrightarrow (\langle xzy \rangle \in A)]$.

定义 B1 $(x \in A \cap B) = [(x \in A) \wedge (x \in B)]$.

定义 B2 $(x \in \overline{A}) = \neg (x \in A)$.

定义 B3 $(x \in \mathfrak{D}(A)) = (\exists y)(\langle yx \rangle \in A)$.

https://doi.org/10.35534/tms.

C 组.

1) $(\exists a)[\neg \mathfrak{Em}(A) \wedge (\forall x)[(x \in a) \to (\exists y)((y \in a) \wedge (x \subset y))]]$.

2) $(\forall x)(\exists y)(\forall uv)[((u \in v) \wedge (v \in x)) \to (u \in y)]$.

3) $(\forall x)(\exists y)[(u \subset x) \to (u \in y)]$.

4) $(\forall xA)[\mathfrak{Un}(A) \to (\exists y)(\forall u)((u \in y) \to (\exists v)((v \in x) \wedge (\langle uv \rangle \in A)))]$.

D 组.

$\neg \mathfrak{Em}(A) \to (\exists u)[(u \in A) \wedge (\mathfrak{Ex}(u, A))]$.

E 组.

$(\exists A)[\mathfrak{Un}(A) \wedge (\forall x)(\neg \mathfrak{Em}(x) \to (\exists y)((y \in x) \wedge (\langle yx \rangle \in A)))]$.

以上所列出的形式棐合论系统记作 $\mathcal{LFG}$。由于 Godel 已经把他的定理演绎得很完整，我们就不在这里展开了。这里我们直接引用他的记号和定理。Godel 在他的书中并没写出他引进集合记号的过程，我们可用一般逻辑书中的增加常量记号的办法来加以处理．这样一来语言就膨胀了。令 $\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{U}$ { C。，C1，… }。将 $\mathcal{L}$ 的全部存在形公式列出如下：

$$\exists XA_0(X), \exists XA_1(X), \cdots.$$

再增加如下的公理：

$$\exists ! XA_0(X) \to A_0(C_0), \exists ! XA_1(X) \to A_0(C_1), \cdots.$$

加上原来的系统所组成新的形式集合论系统 $\mathcal{LFG}^+$，这样一来每个集合论中能证明是存在唯一的集合或类 就有了它的记号,其中包括了 ω，ω1 等基数集合，全体序数所作成的类 ON 和全体基数所作成的类 N 等，对这些集合与类我们仍沿用他们原来的记号.

上面我们介绍了形式集合论系统 $\mathcal{LFG}^+$。在下面的讨论中会出现同一个概念的 3 个不同层次的实现的问题。我们的工作环境就是我们普通所理解的集合论。

我们的工作环境中有它的 0，1，…，ω，ω1 等基数集合，全体序数所作成的类 ON 和全体基数所作成的类 N 等。我们把它们写成 $\tilde{0}$ ，$\tilde{1}$…，$\tilde{\omega}$，$\widetilde{\omega_1}$，$\widetilde{ON}$ 和 $\tilde{N}$ 等。这个工作环境当然也可以看成是一个集合论模型，一般地我们认为

这是一个常规的集合论模型。也就是不存在对∈关系是无限递降的元素序列并且 an 是由不可数多个元素来组成的模型。而其他模型就都是在这个工作环境中构造出来的。第 2 个层次是 $\mathcal{LFG}^{+}$ 的记号，我们就直接使用记号 0，1，…，ω，ω1，ON 和 N 等。在定理中当我们谈到集合论模型时，就是指 $\mathcal{LFG}^{+}$ 的模型。当我们构造这些模型时，在我们的模型中也有与上述记号相应的元素。我们把模型中的集合与类记成 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{X}$。所以在模型中我们把与上述记号相应的集合与类写成 $\tilde{0}$, $\tilde{1}$…，$\tilde{\omega}$，$\widetilde{\omega_1}$，$\widetilde{ON}$ 和 $\tilde{N}$ 等。

定理 1（良基性定理）

$$\neg\exists A[A\mathfrak{Fn}\omega\wedge\forall n(n\in\omega\rightarrow A'n\in A'(n+1))].$$

以上用的是文献［1］的内定理记号，它的含义是不存在集合序列 A，A 是 ω 上的函数，使得 A'（n+1）∈ A'n，n ∈ ω，这里面 A 是一个内序列。

证明　定理的证明可以直接由公理 D 得出。公理 D 说：任意非空集合 $\bar{X}$ 存在一个元素 $\bar{a}$，$\bar{a}$ 与 $\bar{X}$ 不相交。而使得 $\overline{A'}$（$\bar{n}+\bar{I}$）∈ $\overline{A'}\bar{n}$，$\bar{n}$ ∈ $\bar{\omega}$ 的集合序列 $\bar{A}$ 如果存在，那么把它们放在一起组成一个集合 $\bar{B}=\overline{A'}\bar{n}$。

$$\bar{A}'\bar{1}\in(\bar{B}\cap\bar{A}'\bar{0}),\cdots,\bar{A}'(\bar{n}+\bar{1})\in(\bar{B}\cap\bar{A}'\bar{n}),\cdots.$$

在集合 $\bar{B}$ 中不存在与集合 $\bar{B}$ 不相交的元素，与公理 D 发生矛盾，所以定理得证。

良基性定理是集合论的奠基性定理之一。人们希望有了这个定理就能保证集合是建立在健康的基础之上。也就是说希望集合论模型是像良基性原则所规定的那样不存在无限多个向下的∈元素序列。 但是这个愿望并没有能够实现。恰恰相反，答案是否定的，下面的定理就来讨论这个问题

定理 2（非良基集合论模型存在定理）存在一个集合论模型 $\bar{\mathfrak{S}}$，其中存在集合外序列：$\overline{a_{\tilde{0}}},\overline{a_{\tilde{1}}},\cdots$，使得 $\overline{a_{\widetilde{n+1}}}\in\overline{a_{\tilde{n}}},\tilde{n}=\tilde{0},\tilde{1},\cdots$。这里 $\bar{n}$ ∈ $\bar{\omega}$ 是工作环境中的自然数而不是模型中的自然数 $\bar{n}$ ∈ $\bar{\omega}$ 而∈则是模型中的“属于”关系。

证明 以 TH^{+} 表示 $\mathcal{LFG}$ 的全部定理所组成的理论，再选取一个全部由新常数所组成的集合 C=｛$\tilde{C}_0$，$\tilde{C}_1$…｝。构造下面的理论 $T=TH^{+}\cup\{c_{\widetilde{n+1}}\in c_{\tilde{n}},\tilde{n}=\tilde{0},\tilde{1},\cdots\}$。

这里 $\bar{n}$ ∈ $\bar{\omega}$ 看成是工作环境中的自然数。容易证明如果 TH^{+} 是和谐的，

那么 T 也是和谐的。因为设 T’为 T 的任意有限子集。T’中所出现的全部新常数为 $\tilde{C}_{i1}$，…$\tilde{C}_{ik}$ 可以在 $\mathcal{LFG}^{+}$ 的任意一个模型中用其中的有限个自然数来解释 $\tilde{C}_{i1}$，…$\tilde{C}_{ik}$ 元，使 T 得到满足。所以 T' 有模型 G’。由模型论［2］中的紧致性定理知 T 也是和谐的。于是 T 有模型 $\overline{\mathfrak{S}}$. $TH^{+}\subset T$ 保证了 $\overline{\mathfrak{S}}$ 是满足 LFG+ 的集合论模型。在模型 $\overline{\mathfrak{S}}$ 中用来解释 $\tilde{C}_0$，$\tilde{C}_1$ 的元素 $\overline{a_{\tilde{0}}},\overline{a_{\tilde{1}}},\cdots$ 满足 $\overline{a_{\widetilde{n+1}}}\in\overline{a_{\tilde{n}}},\tilde{n}\in\tilde{\omega}$。

这样一来一个新的悖论诞生了：它就是存在实际上是非良基的集合论模型，而这个模型的理论中却有良基性定理。对这个新的悖论我们给出如下的解释：

1）和 Skolem 悖论一样，定理 1 是集合论的内定理，而定理 2 是集合论的外定理，定理中的 $\overline{a_{\tilde{0}}},\overline{a_{\tilde{1}}},\cdots$ 不是集合模型的内序列而是一个外序列。所以 2 个定理是可以兼容的。

2）集合论模型不是像我们所想象的那样简单。尤其是其中的结构不是只存在一个一个地向上的∈关系，向下只能追溯到空集。而却是也可能存在向下的 E 无限外序列。

3）虽然在模型 G 中存在着向下的∈无限外序列。这只是一个从外部看的序列。它们应该是不能组成一个真正是建立在而之上的内部函数序列，因为集合论具有良基性的内定理。因此这个外部序列 $\overline{a_{\tilde{0}}},\overline{a_{\tilde{1}}},\cdots$ 满足 $\overline{a_{\widetilde{n+1}}}\in\overline{a_{\tilde{n}}},\bar{n}\in\tilde{\omega}$ 在模型内部是如何构成的尚需进一步探讨。

3　非良基的集合论模型的精确化

上一节我们构造了一个非良基的集合论模型使其中出现了一个对∈ 是向下的无限外序列．那么这个元素序列能不能组成一个真正是建立在 ω 之上的内部函数序列呢？如果它们组成一个这样的序列，那么就 和良基性定理产生了矛盾了．但是如果我们从一开始 就把他们放在一个序列里结果又会怎么样呢？下面我们就来构造这样的模型

定理 3（ 局部非良基的集合序列存在定理） 存在一个集合论模型 $\overline{\mathfrak{S}}$，其中存在集合序列：$\overline{A}\mathfrak{F}n\bar{\omega}$，满足 $\{\overline{A'}\bar{n}\in\overline{A'}(\overline{n+1}),\bar{n}=\bar{0},\bar{1},\cdots\}$，其中 $\bar{n}$=$\bar{0}$，$\bar{1}$。。。是模型中的自然数.

证明 以 TH^{+} 表示 $\mathcal{LFG}^{+}$ 的理论如前，再选取一个新常数 C。构造下面的理

论

$$T=TH^{+}\cup\{C\mathfrak{F}n\omega,C'n\in C'(n+1),n=0,1,\cdots\}$$

这里 $n\in\omega$ 看成是 LFG^{+} 中的自然数记号，只有这样才能保证上列 T 是由式子来组成．仿前证明如果 TH^{+} 是和谐的，那么 T 也是和谐的．因为设 T' 为 T 的任意有限子集．不妨设 TH^{+}，$C\mathfrak{F}n\omega$ 已经在 T' 年，全部其他式子为 $C'(i_1)\in C'(i_1+1)$，$\cdots C'(i_k)\in C'(i_k+1)$。可以在 LFG^{+} 的一个模型 $\overline{\mathfrak{S}}$ 中构造一个从 $\overline{\omega}$ 到 $\overline{\omega}$ 的函数，用其中的有限个自然数来解释 $C'(i_1)\cdots$，$C'(i_k)$，使 T' 得到满足．所以 T' 有模型 $\overline{\mathfrak{S}}$。 由模型论［2］ 中的紧致性定理知 T 也是和谐的．于是 T 有模型 $\overline{\mathfrak{S}}$。在模型 $\overline{\mathfrak{S}}$ 中用来解释 C 的元素 $\overline{A}$ 满足 $\overline{A}\mathfrak{F}n\overline{\omega}$，$\{\overline{A'n}\in\overline{A'n}+\overline{1}$，$\overline{n}\in\overline{0}$，$\overline{1}$，$\cdots\}$。

在模型 $\overline{\mathfrak{S}}$ 中元素 $\overline{A'n}$；$\overline{n}\in\overline{0}$，$\overline{1}$，…是不是一个向下的无限∈序列呢？如果是的话，那么这会不会与良基性定理产生矛盾呢？其实 $\overline{A'n}$；$\overline{n}\in\overline{0}$，$\overline{1}$，…的确是一个向下的无限 E 序列，但是它仍然是一个外序列。所以仍然不会与良基性定理产生矛盾。因为定理中不能排除在 $\overline{A''\omega}$ 中除了 $\overline{A'n}$；$\overline{n}\in\overline{0}$，$\overline{1}$，…之外另有其他元素 $\overline{b}$，使得 $\overline{b}\cap\overline{0}\,\overline{A'0}=\emptyset$。也就是说在模型 $\overline{\mathfrak{S}}$ 中的集合 $\overline{\omega}$ 并不是只由 $\overline{0}$，$\overline{1}$，…来组成的，而还会有其他的不同元素，关于这一点可以参考非标准数论中的说明。

推论 1 定理 3 中的 $\{\overline{0}$，$\overline{1}$，$\cdots\}$ 在模型 $\overline{\mathfrak{S}}$ 中不组成集合。

证明假设 $\{\overline{0}$，$\overline{1}$，$\cdots\}$ 组成 的集合 $\overline{B}$ 那么 $\overline{B}$ 对函数 $\overline{A}$ 的像 $\overline{A''B}$ 组成 $\overline{A'n}$；$\overline{n}=\overline{0}$，$\overline{1}$，…是一个向下的无限∈序列，但是它是一个内序列，与定理 1 产生矛盾。所以 $\{\overline{0}$，$\overline{1}$，$\cdots\}$ 不能组成 $\overline{\mathfrak{S}}$ 的集合。

定义 外集合是指工作环境的集合，内集合是指模型里的集合。

可以给出 $\{\overline{0}$，$\overline{1}$，$\cdots\}$ 作为外集合的证明，推论 1 也就给出了外集合不是内集合的例子。也就是说一个内集合的某些元素，从工作环境的角度来看，它们组成一个集合，但是在模型中它们并不组成集合。

定理 4 定理 3 中的 $\{\overline{0}$，$\overline{1}$，$\cdots\}$ 在工作环境中组成集合。

证明 我们只能用外定义来进行工作。首先定义自然数记号集 Na，这是可以用归纳法来完成。 再定义每一个 $x\in Na$ 在模型 $\overline{\mathfrak{S}}$ 中的实现它们的总体就组成

集合｛$\bar{0}$，$\bar{1}$，…｝。

4 非良基集合论模型中的良序集与类

在文献［1］的集合论系统 $\mathfrak{LFG}$ 中定义了很多对∈关系是良序的集与类，例如 ω，ω_1 等基数，全体序数所作成的类 *ON* 和全体基数所作成的类 *N* 等。这些良序的集与类被认为是最遵守良基性原则的。当然这是从内定理的角度来说的。那么在集合论模型中它们会不会也很遵守良基性原则呢。其答案也是否定的。为此我们将上一节的定理做一个推广。

定理 5（良基类与非良基类的转换定理）设 *A* 是一个可定义类，如果存在一个集合论模型 $\mathfrak{S}$，其中 $\bar{A}$ 满足良基性原则并且存在对∈关系上升的无限元素序列。那么存在一个集合论模型 $\bar{\mathfrak{S}}$，其中 $\bar{A}$ 存在元素序列：$\overline{a_{\tilde{0}}},\overline{a_{\tilde{1}}},\cdots$ 满足

$$\overline{a_{\tilde{n}}}\in\bar{A},\overline{a_{\widetilde{n+1}}}\in\overline{a_{\tilde{n}}},\tilde{n}=\tilde{0},\tilde{1},\cdots$$

其中 $\tilde{n}=\tilde{0},\tilde{1},\cdots$ 是工作环境中的自然数而不是模型中的自然数。

证明 以 TH^+ 表示 $\mathfrak{LFG}^+$ 的理论如前，再选取一个全部由新常数所组成的集合 C=｛$C_{\tilde{0}}$，$C_{\tilde{1}}$，…。构造下面的理论

$$T=TH^+\cup\{c_{\tilde{n}}\in A,c_{\widetilde{n+1}}\in c_{\tilde{n}},\tilde{n}=\tilde{0},\tilde{1},\cdots\}$$

容易证明如果 TH^+ 是和谐的，那么 T 也是和谐的。因为设 T’为 T 的任意有限子集。T’中所出现的全部新常数为 $C_{\tilde{i1}}\cdots$，$C_{\tilde{ik}}$。可以在模型 G' 中用其中 A 的有限个对∈关系上升的无限序列中的元素来解释 $C_{\tilde{i1}}\cdots$，$C_{\tilde{ik}}$，使 T’得到满足。所以 T' 有模型 $\mathfrak{S}$。由模型论 $\mathfrak{S}$ 中的紧致性定理知 T 也是和谐的。于是 T 有模型 $\bar{\mathfrak{S}}$。。

在模型 $\bar{\mathfrak{S}}$ 中用来解释 $C_{\tilde{0}}$，$C_{\tilde{1}}$，…的元素 $\overline{a_{\tilde{0}},a_{\tilde{1}}}$ 满足 $\overline{a_{\tilde{n}}}\in\bar{A},\overline{a_{\widetilde{n+1}}}\in\overline{a_{\tilde{n}}},\tilde{n}=\tilde{0},\tilde{1},\cdots$

以上的插入过程是只针对一个集合进行插入，对多个集合同时进行插入这种序列也是可以做到的，我们这里不再多加讨论。这样一来我们找到了集合论模型 其中 $\bar{\omega}$，$\overline{\omega_1}$ 等集合，$\overline{\mathrm{ON}}$ 和 $\bar{\mathrm{N}}$ 等类的内部都可以存在着对∈关系是无限递降的元素序列。原来我们认为集合论模型中的序数是最遵守良基性原则的。而现在在它们之间插入了一些对 E 关系是下降的无限元素序列，顺序就完全被搞乱了。还有人会说这个对 E 关系是无限递降的元素序列如果插入于 $\bar{\omega}$ 的后段也

就同时被插入于 $\overline{\omega_1}$，$\overline{ON}$ 和 $\overline{N}$ 等集合与类，因为 $\overline{\omega}$ 是 $\overline{\omega_1}$，ON 和 N 等集合与类的前段。是否可以将这种对∈关系是无限递降的元素序列插入于一个不可数的上升序列之后段呢？我们知道 ω_1 不存在共尾的可数上升序列，那么能不能插入一个对∈关系是无限递降的元素序列于 $\overline{\omega_1}$ 的不可数多个元素之后使插入之后所得到的模型中这个元素仍然是 $\overline{\omega_1}$？答案是肯定的，但是办法要稍微复杂一点。

定理 6（下降的∈序列的定点插入定理）设 $\overline{\mathfrak{S}}$ 是常规集合论模型。那么存在一个集合论模型 $\overline{\mathfrak{S}}$，其中有一个对∈关系下降的无限元素序列 $\overline{a_{\tilde{0}}},\overline{a_{\tilde{1}}},\cdots$ 被插入于可的不可数多个元素的后面。它们同属于新模型 $\overline{\mathfrak{S}}$ 中的 1。

证明 选取一个新常数集合

$$D=\{d_{0'},\cdots d_{\alpha'}\cdots;\alpha'\in\omega_1{}'\}$$

以它们代表 G' 中 $\omega_1{}'$ 的元素。将 G' 膨胀成为

$$\mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{G}^+\{d_{0'},\cdots d_{\alpha'}\cdots;\alpha'\in\omega_1{}'\}$$

的模型 $\mathfrak{S}S'_{\omega_1{}'}$。以 TH’ 表示 $\mathfrak{S}S'_{\omega_1{}'}$ 的理论，再选取一个新常数集合 C=｛$C_{\tilde{0}}$，$C_{\tilde{1}}$⋯｝构造下面的理论

$$T=TH'\cup\{c_{\tilde{n}}\in\omega_1,c_{\widetilde{n+1}}\in c_{\tilde{n}},\tilde{n}=\tilde{0},\tilde{1},\cdots\}\cup$$
$$\{d_{\alpha'}<c_{\tilde{n}};\tilde{n}=\tilde{0},\tilde{1},\cdots,\alpha'<\omega_1{}'\}.$$

可以证明 T 是和谐的。因为设 T’ 为 T 的任意有限子集。T’ 中所出现的全部新常数为 $C_{\tilde{i1}}\cdots$，$C_{\tilde{ik}}$，$d_{a_1}{}'$，$\cdots d_{a_m}{}'$。可以在模型 $\overline{\mathfrak{S}_{\omega_1{}'}}$ 中的 $\omega_1{}'$ 里最大的 $d_{a_j}{}'$；所对应的元素之后找到有限个符合良序性的元素来解释 $C_{\tilde{i1}}\cdots$，$C_{\tilde{ik}}$，使 T’ 得到满足。所以 T' 有模型 $\overline{\mathfrak{S}_{\omega_1{}'}}$。由模型论［2］中的紧致性定理知 T 也是和谐的。于是 T 有模型 $\overline{\mathfrak{S}_{\omega_1{}'}}$。由模型 $\overline{\mathfrak{S}_{\omega_1{}'}}$ 中用来解释 $\tilde{C}_0$，$\tilde{C}_1\cdots$ 的元素 $\overline{a_{\tilde{0}}},\overline{a_{\tilde{1}}},\cdots$ 满足 $\overline{a_{\widetilde{n+1}}}\in\overline{a_{\tilde{n}}},\tilde{n}=\tilde{0},\tilde{1},\cdots$ 并且被插入于 $\overline{\omega_1}$ 的不可数多个元素的后面。模型 $\overline{\mathfrak{S}_{\omega_1{}'}}$ 还可以归约成为 $\mathcal{L}$ 的模型 $\overline{G}$。，而上述下降序列的性质是不会随模型的归约而改变。

当然除了上述被插入于 $\overline{\omega_1}$ 的不可数元素序列的后面的元素 $\overline{a_{\tilde{0}}},\overline{a_{\tilde{1}}},\cdots$ 之外也会带来其他的元素，我们在这里不再加以讨论。

5 结论

自从 Hilbert 创导建立形式化的公理系统以来，很多数学分支都建立了这样

的系统。在所有常见的数学系统之中，形式化的公理和这个数学系统本身一般地是没有什么相悖的现象的。但是形式化的公理系统用来研究集合论系统时就会有些不可思议的问题出现。Skolem 发现可以存在可数的集合论模型，而这个模型中却存在不可数的集合。Skolem 悖论说明了集合论公理中关于不可数集合存在性的规定并不能限制集合论模型一定是由不可数个元素来组成。我们在文献［3］里研究了这种模型，并提出了虚拟实数的概念。虚拟实数就像银行中的虚拟货币，你可用它来买东西，它可从一个户头转拨到另一个户头，但是钱的实体是不存在的。本文给出了一个新的集合论悖论：我们证明了非良基性的集合论模型的存在性，也就是说存在集合论模型，其中存在对∈关系是下降的无限元素外序列。我们还证明了可以存在集合论模型其中 ω，ω_1 等集合，ON 和 N 等类的内部都存在着对∈关系是无限递降的元素外序列。这种对∈关系是无限递降的元素外序列还可以插入于一个没有可数共尾的对∈是上升的序列的后面，插入之后成为同名集合的一部分。用这种模型我们还给出了外集合不是内集合的例子。

参考文献

［1］Gödel K，The consistency of the ax iom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory［M］. 2nd ed. Princeton N J：Princeton Univ Press，1951

［2］Chang C C，Keisler H J. Model theo ry［M］. eth ed. Amsterdam：North–Holland，1990