教育研讨
2024 年 10 月第 6 卷第 5 期

基于代数思维的几何问题求解方法对比与应用分析

胡 凡 陈壁廷 李孟雨 杨晓芳

成都师范学院，成都

摘 要 | 代数思维以其结构化和符号化的特性，为几何问题提供了不同于传统几何方法的独特视角。本文通过分析代数方法的逻辑框架和几何问题的本质属性，探讨了代数在解题过程中所展现的抽象与一般化能力，并结合典型的几何问题实例，展示了代数方法与几何方法在求解路径上的不同，评估了代数思维在处理复杂几何结构时的有效性与局限性。研究结果表明，代数思维不仅能够简化复杂的几何问题，还能提供新的解题思路，具有广泛的应用潜力。

关键词 | 代数思维；几何问题求解；代数方法；几何结构分析

在数学解题过程中，代数思维和几何思维作为两种重要的数学思维方式，在不同类型的问题中分别展现出各自的优势。代数思维通过符号化和抽象化的方式，将现实问题简化为代数表达式，通过严密的逻辑推理和计算得出精确解答。这种思维强调变量、方程、函数等符号的运用，能够将具体问题转化为抽象的数学语言，使复杂的问题结构得以简化，变得更易于操作和分析。几何思维则依赖于图形的直观呈现，通过对空间关系的观察、想象和推导，提供更具可视化的解题路径。几何思维注重图形、位置和形状的特性，通过构造辅助线、运用几何定理和图形变换，直观且有效地解决问题。这种直观性不仅使问题的本质更加清晰，还能激发学生的空间想象力与创造性思维。

随着数学教育的发展，代数思维和几何思维的结合逐渐成为一种趋势。在传统的数学教学中，代数与几何往往被视为相对独立的学科，各自具备独特的解题方法和思维方式。然而，随着现代数学教育的深入，人们逐渐认识到，代数与几何方法的结合能够提供更强大的问题解决能力。特别是在复杂

基金项目：教育部高等教育司2023年产学合作协同育人项目“地方本科院校数学与应用数学专业创新创业教育体系构建研究”（项目编号：230806007104348）；2024年教育部第三期供需对接就业育人项目“数学竞赛项目驱动大学生创新能力提升的探索及实践”（项目编号：2023122184178）。
通讯作者：胡凡（2001–），男，四川广安人，成都师范学院本科在读，研究方向：数学与应用数学。
文章引用：胡凡，陈壁廷，李孟雨，等．基于代数思维的几何问题求解方法对比与应用分析［J］．教育研讨，2024，6（5）：1336–1340.
https://doi.org/10.35534/es.0605179

的数学问题中，两种思维方式相辅相成，代数思维的严密性与几何思维的直观性可以互为补充，形成更为系统化的解题思路。将代数思维引入几何问题的求解，不仅可以简化问题的处理，还能提供更为抽象和一般化的视角，使得数学学习更具逻辑性和系统性。这种方法不仅能提高学生的解题效率，还能培养他们跨领域的数学能力，这对数学教育的发展具有重要意义[1]。

本文旨在通过对比代数法与几何法的解题过程，揭示代数思维在几何问题中的表现差异和独特优势，特别是它们在处理复杂几何结构和推导过程中所展现的系统性与准确性。研究的核心在于通过具体例题的分析，深入探讨代数思维如何应用于几何问题，并从中总结出代数法和几何法各自的适用性与优势。通过具体的解题实例，我们将展示代数思维在处理几何问题时的符号化、逻辑性和抽象化能力，并探讨其在不同类型几何问题中的表现。进一步地，本文将分析代数思维如何通过代数方程、坐标系和函数等工具，有效简化几何问题的求解过程，同时也揭示代数方法在某些几何问题中可能存在的局限性。

此外，本研究还将探讨代数法与几何法的互补关系。通过案例对比，我们将评估在具体问题中两种方法的优势互补，分析代数法如何弥补几何法在直观构造中的精确性不足，以及几何法如何为代数法提供直观的解题思路。总结部分将提出结合代数与几何思维的教学建议，为未来数学教学和研究提供理论支持与实践指导。这样的研究不仅能够丰富数学思维方式的教学内容，还能为提升学生的数学综合素养和创新能力提供有效的路径。

1 代数思维的定义与特性

1.1 代数思维的核心概念

代数思维的本质是将具体问题抽象为数学符号体系，通过这些符号表达式进行推理和操作，从而解决问题。代数思维不仅是代数问题求解的工具，更是一种跨越不同数学领域的普遍思维方式，它的核心特征在于其符号化、逻辑性和抽象性。符号化指的是通过变量、方程、函数等数学符号来表达现实中的数量关系或空间结构，这使得代数思维能够摆脱具体数值的束缚，进入更高层次的数学推理；逻辑性则体现在代数推理过程中的严格演绎和推导，它确保了解题过程中每一步的合法性与合理性；抽象性则意味着代数思维能够从具体问题中提炼出普遍规律，将特定问题转化为更具一般性的形式，并通过这些形式解决具有相似结构的问题[2]。

这种抽象化的能力使代数思维超越了传统的数值计算，成为数学中分析、推理和模型构建的重要工具。文献表明，代数思维在构建和解决模型时表现出极高的适应性，特别是在跨学科应用中，代数的通用性和符号操作能力使其能够处理几乎所有的数学领域问题，从几何、微积分到组合数学和离散数学。

1.2 代数思维在解题中的作用

代数思维在解题中的核心价值不仅体现在符号化表达和计算能力上，还体现在其系统化、一般化的处理方式上。这种思维方式使得解题者能够透过符号关系洞察问题的结构和规律，从而提供更加精确和有效的解决方案。文献指出，代数思维特别擅长处理具有复杂关系的几何问题，例如解析几何中曲线和方程的关系，借助代数表达式可以将几何问题符号化，进而通过方程或不等式的运算获得解答[3]。

代数思维在几何问题中的应用并不仅仅是将几何问题转化为代数形式，还涉及对问题结构的理解与简化。例如，在解析几何中，代数思维不仅能够将点、线、面等几何对象用方程表达，还能通过代数方法对几何图形进行变换、求交等操作，极大地降低了传统几何法的复杂性。通过代数思维，几何问题可以被转化为代数方程的求解问题，使复杂的空间关系得以用简洁的代数工具处理。这种符号化的处理方式具有普适性，适用于大多数几何问题，尤其是在处理涉及坐标系、曲线方程和空间变换的复杂问题时，代数思维表现出明显的优势[4]。

此外，代数思维还能够通过代数表达式的推理和运算，帮助解题者发现潜在的结构和规律，从而实现对问题的系统化求解。它的抽象化与符号化能力能够快速捕捉问题的本质，并通过通用方法解决其他类似问题。因此，代数思维不仅仅是一个解题工具，它更是一种用于分析、归纳和推广的思想方法，使数学问题的处理变得更加系统和简便。

https://doi.org/10.35534/es.0605179

2　代数思维视角下的几何问题解析与应用

几何问题主要研究空间中几何图形的形状、位置及其相互关系，这类问题通常涉及点、线、面、角、图形等几何对象的性质及其变化规律。平面几何问题包括对三角形、四边形、圆及其组合的研究，主要依据几何定理（如勾股定理、圆的性质等）来解答。而立体几何问题则涉及三维空间中几何体的体积、表面积及其截面的研究，诸如球、圆柱、圆锥等几何体的体积与表面积计算。几何问题的核心在于如何利用空间直观性来进行逻辑推理、构造辅助线或者几何变换，以解决图形的性质、角度关系、相似性等问题[5]。

然而，几何问题并不仅仅依赖于图形的直观性。随着数学的发展，越来越多的几何问题通过代数方法进行处理，特别是在解析几何中，几何问题被转化为代数形式。在解析几何中，几何对象（如点、线、圆等）可以通过坐标和方程来描述，通过代数运算解决几何问题的关键在于对其进行符号化、抽象化处理。例如，计算两条直线的交点、求平面上曲线的切线方程、利用方程组描述空间中的位置关系等，都属于运用代数工具解决几何问题的经典题型。这样的代数化处理方法不仅能够提高解题的精度，还可以在解决复杂几何问题时简化推导过程。

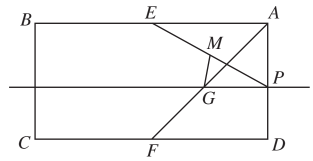
3　代数法与几何法的解题对比分析

为了更加深入地探讨代数思维和几何思维在数学问题求解中的区别与联系，本部分通过一个典型几何问题展示这两种解法的不同路径，分析代数法与几何法的核心特征和适用性。通过例题的解法对比，不仅能够体现代数思维在几何问题中的符号化和抽象化优势，也能展现几何思维在直观构造和图形化推理中的优越性。

3.1　题目呈现

本文选择的例题如下：

已知矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD=8$，点E、F分别是边 AB、CD 的中点，点P为 AD 边上动点，过点P作与 AB 平行的直线交 AF 于点G，连接 PE，点M是 PE 中点，连接 MG，问：MG 的最小值是多少？



该题既涉及几何构造，又需要应用相似三角形、直线平行等几何性质，同时也可以借助代数方法进行精确的坐标和函数求解，是数形结合思想的典型应用。

3.2　几何法解题分析

几何法的核心在于通过对图形的观察和辅助线的构造，将复杂问题转化为更易处理的几何推理。这种方法依赖于几何定理的应用，强调图形的直观性和对角、边、面积等几何量的感知。

（1）辅助线与相似三角形构造

在该题中，以矩形的基本几何性质为基础，我们可以通过构造辅助线来简化问题的解答。首先，连接AC和EN，如图1所示，则由三角形的相似条件可知△APG与△ADF为相似三角形。通过相似三角形的边长比例关系，可以得到 PE 和 MG 之间的关系。此外，由于点M是 PE 的中点，因此 MG 的长度取决于点P在边 AD 上的位置。

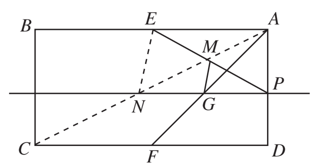


图 1　辅助线与相似三角形构造

Figure 1　Auxiliary lines and similar triangle constructions

（2）最小值的推导

由于P是边 AD 上的动点，因此 MG 的最小值取决于点P的具体位置。通过相似三角形的性质，可以进一步求出点P在某一特定点时，△APE与△GFM的边长比例达到最优，进而使得 MG 最小。在几何法中，最小值的推导依赖于对图形中相似性和对称性的观察。解题步骤如下：

$\because AB=2AD=8$，点E、F分别是边 AB、CD 的中点，

$\therefore CF=FD$，$AE=4$，$AC=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$，

$\therefore \sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

连接 AC 交 PG 与点N，连接 EN ，

$\because PG//CD$ ，

$\therefore \triangle ANG \sim \triangle ACF$ ， $\triangle APG \sim \triangle ADF$ ；

$\therefore \dfrac{NG}{CF}=\dfrac{AG}{AF}=\dfrac{PG}{DF}$ ，

$\because CF=FD$ ，

$\therefore NG=PG$ ，

$\because$点M是 PE 中点，

$\therefore MG=\dfrac{1}{2}EN$ ，

当 $EN\perp AC$ 时， EN 最小， MG 也最小；

$\sin\angle BAC=\dfrac{EN}{AE}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ，

$EN=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ ， $MG=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ；

故答案为： $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

（3）几何法的特点与适用性

几何法的优点在于其直观性和简洁性，通过辅助线的构造和相似三角形的性质，能够快速找到解题路径。然而，几何法也有其局限性，特别是在面对复杂几何关系或多条辅助线构造时，推导过程可能变得繁琐。该题中的相似三角形性质为主要的推理依据，通过构造相似三角形简化了问题，但难以精确得到最小值的具体数值。

3.3 代数法解题分析

代数法的基本步骤是通过引入坐标系，将几何问题符号化、方程化，依靠代数运算中的精确推导来解决几何问题。该方法不仅能够通过符号表达式精确描述点与线、线与面的关系，还可以利用导数、最优化方法等工具求解最值问题。

（1）引入坐标系进行符号化处理

首先，以D点为原点，CD线段所在直线为X轴，DA线段所在直线为Y轴，建立平面直角坐标系。如图所示，矩形 $ABCD$ 的顶点 $A(0,4),B(-8,4)$, $A(0,4),B(-8,4),C(-8,0),D(0,0)$，点$E$和$F$分别为边$AB$和$CD$的中点，坐标分别为 $E(-4,4),F(-4,0)$。设点P在边AD上，P的坐标为（0，t）。此时，直线PE和MG的方程可以通过代数方法进行精确推导。

（2）代数表达式的求解与最小值推导

通过直线方程的斜率公式，求出直线AF的斜率，进而确定直线PE和MG的代数关系。通过将这些代数表达式代入到点G和M的坐标方程中，我们可以得到MG的代数表达式。然后，利用二次函数求最小值的公式或导数方法，可以精确求出MG的最小值。解题方法如下：

$\because$四边形ABCD是矩形，且 $AB-2AD-8$,

$\therefore A(0,4),B(-8,4),C(-8,0),D(0,0)$,

$\because$点E、F分别是边AB、CD的中点，

$\therefore E(-4,4),F(-4,0)$,

不妨设P（0，t），

$\because$点M是PE中点，

$\therefore M\left(-2,\dfrac{t+4}{2}\right)$,

设直线AG的解析式为 $y=kx+b$,

则 $\begin{cases}-4k+b=0,\\ b=4\end{cases}$

解得： $\begin{cases}k=1\\ b=4\end{cases}$

$\therefore$直线AG的解析式为 $y=x+4$,

$\because PG\parallel x$ 轴交AF于G,

$\therefore G(t-4,t)$,

$\therefore MG^{*}=\left[(t-4)-(-2)\right]^{2}+\left(t-\dfrac{t+4}{2}\right)^{2}=\dfrac{5}{4}t^{2}-6t$

$8=\dfrac{5}{4}\left(t-\dfrac{12}{5}\right)^{2}+\dfrac{4}{5}$,

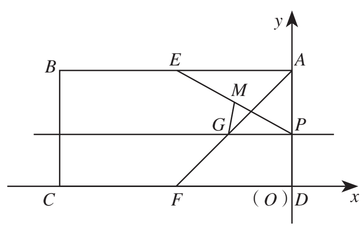
$\because \dfrac{5}{4}>0$,

$\therefore MG^{2}$有最小值$\therefore MG^{2}=\dfrac{4}{5}$,

$\because MG>0$,

$\therefore MG$的最小值为 $\sqrt{\dfrac{4}{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,

故答案为： $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.



（3）代数法的特点与适用性

代数法的优势在于其精确性和逻辑性。代数法通过将几何问题转化为代数问题，能够避免几何推

https://doi.org/10.35534/es.0605179

理中的误差，并利用代数运算的严密性得到精确解。在该题中，通过引入坐标系，将点与线之间的关系符号化处理，使得问题变得系统化、易于求解。此外，代数法在处理复杂几何问题时表现出极高的适应性，特别是在需要精确求解最值时，采用代数方法能够直接得到最优解。

4　总结

代数思维通过将几何问题符号化、抽象化，在解决诸多几何问题时展现出独特的优势，尤其适合处理解析几何、最值问题、几何变换以及复杂几何关系等问题。解析几何中的直线、圆、点等位置关系，通过代数方法可以系统地建立方程并求解。对于几何图形的最值问题，如求最短距离或最大面积，代数思维可以利用函数表达式，通过导数等工具精确求得最优解。在解决几何变换问题时，如平移、旋转、反射等，通过代数手段可以简洁地表示和运算。此外，对于复杂几何关系，如共线、共点等问题，代数方法可以避免传统几何推理中的繁琐操作，直接通过代数推导解决。

在本文所给例题的解答过程中，代数思维帮助我们通过坐标系将几何问题符号化，从而构建出精确的代数表达式，最终借助优化方法求出最小值。相比几何法的直观构造，代数法的逻辑更加严谨且精确，特别是在求最小值时能够直接获得精确解。几何思维虽然直观且便于构造解题思路，但在处理复杂问题时可能显得不够系统。代数思维与几何思维的结合，不仅让解题过程更加全面，还能充分利用各自的优势，既快速找到解题路径，又能够精确求解。

参考文献

［1］陈琦．初中数学教学中代数思维方式的培养途径［J］．数学学习与研究，2022（22）：14–16.
［2］王晓炜．对一道立体几何截面题的探究［J］．中学数学，2021（23）：29–30.
［3］徐方，殷长征．回归教学原点突破思维障碍——以两道解几题求解为例［J］．中学数学研究，2021（7）：31–33.
［4］祝敏君，陈清华．例谈代数思维与几何思维在解题中的应用［J］．数学通讯，2020（11）：1–2，10.
［5］刘大鹏．浅析应用解析几何思维方法解题［J］．中小学教学研究，2017（6）：13–15.

Comparison and Application Analysis of Geometric Problem Solving Methods Based on Algebraic Thinking

Hu Fan　Chen Biting　Li Mengyu　Yang Xiaofang

Chengdu Normal University, Chengdu

Abstract: Algebraic thinking, with its structured and symbolic characteristics, provides a unique perspective for geometric problems that is different from traditional geometric methods. This article analyzes the logical framework of algebraic methods and the essential properties of geometric problems, explores the abstract and generalized abilities exhibited by algebra in solving problems, and combines typical geometric problem examples to demonstrate the differences between algebraic and geometric methods in solving paths, evaluating the effectiveness and limitations of algebraic thinking in dealing with complex geometric structures. The research results indicate that algebraic thinking can not only simplify complex geometric problems, but also provide new problem-solving ideas, with broad potential for application.

Key words: Algebraic thinking; Solving geometric problems; Algebraic methods; Geometric structure analysis