

# Terzaghi 模型极限承载力系数解析解探正

刘大海<sup>1,2</sup> 程国勇<sup>3</sup>

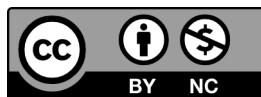
1. 深圳市地质局, 深圳;
2. 深圳地质建设工程公司, 深圳;
3. 中国民航大学机场学院, 天津

**摘要** | Terzaghi 于 1943 年给出了 Terzaghi 模型对于基底完全光滑及基底完全粗糙时的通解, 但未给出承载力系数  $N_y$  的解析解, 也未给出数表值, 仅给出了曲线图。程国勇、邱睿 2011 年发表了 Terzaghi 模型的 CQ 完整解析解, 但  $N_c$ 、 $N_y$  系数数值异常, 公式有错漏。本文在前人研究的基础上, 用极限平衡原理重新推演, 得到了 Terzaghi 模型极限承载力系数的探正解析解。

**关键词** | Terzaghi 模型; 承载力系数; 极限承载力; 探正解析解

Copyright © 2021 by author (s) and SciScan Publishing Limited

This article is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/). <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>



## 1 前言

地基承载力是土力学的基础课题, 理论复杂、公式繁多。

Prandtl 于 1920 年建立了地基极限承载力的 Prandtl 模型<sup>[1-7]</sup>。该模型有 3 个假定: 1) 滑动区分为: I 区为三角形刚性核(压密区), 为朗肯主动土区;

通讯作者: 刘大海, 1957-, 汉族, 江西大余人, 大学本科, 教授级高级工程师, 水文地质工程地质专业。  
文章引用: 刘大海, 程国勇. Terzaghi 模型极限承载力系数解析解探正 [J]. 土木工程进展, 2021, 3(2): 1-15.

<https://doi.org/10.35534/ace.0302006>

Ⅱ区为对数螺旋滑动区；Ⅲ区为朗肯被动土区；2) 基础无埋深 ( $D=0$ )；3) 地基土为无重力介质 ( $\gamma=0$ )，基础底面光滑 ( $f=0$ )。Reissner 将基础旁侧土体按超载处理，得到了有埋深 ( $D \neq 0$ )、滑裂面只延伸到基础底面) 时的补充解。

Terzaghi 在 Prandtl 模型基础上，建立了全面考虑基础埋深 ( $D \neq 0$ )、基底粗糙 ( $f \neq 0$ )、地基土有体重力 ( $\gamma \neq 0$ ) 的 Terzaghi 模型<sup>[8]</sup>。

Terzaghi 极限承载力公式的主要问题： $N_\gamma$  未给出解析解，需试算确定，仅给出了  $N_\gamma$  曲线图<sup>[8]</sup>。后学者给出了  $N_\gamma$  的经验式，有些文献给出了  $N_\gamma$  数值表（各异），未注明出处，表值来源及正确性不明。

程国勇，邱睿等根据极限平衡原理，导出了 Terzaghi 模型基底完全粗糙的地基承载力系数的解析解<sup>[9]</sup>；邱睿，程国勇等进一步解答了地基完全粗糙及完全光滑的地基承载力系数的统一完整 CQ 解析解<sup>[10]</sup>。进一步研究发现，CQ 解  $N_c$ 、 $N_\gamma$  值异常，有错漏。

本文在前人研究的基础上，对 Terzaghi 模型用极限平衡原理重新进行了推演探正。

## 2 Terzaghi 模型极限承载力解

Terzaghi 与 1943 年给出了极限承载力的计算通式及其承载力系数<sup>[8]</sup>：

极限承载力：

$$p_u = q \cdot N_q + c \cdot N_c + \frac{1}{2} B \gamma \cdot N_\gamma \quad (1)$$

超载力承载系数：

$$N_q = \frac{K_{pq}}{\cos^2 \varphi} \quad (2-1)$$

粘聚力承载系数：

$$N_c = \tan \varphi + \frac{K_{pc}}{\cos^2 \varphi} \quad (2-2)$$

体重力承载系数：

$$N_\gamma = \frac{\tan \varphi}{2} \left( \frac{K_{p\gamma}}{\cos^2 \varphi} - 1 \right) \quad (2-3)$$

Terzaghi 给出的基底完全光滑及完全粗糙时  $N_q$  及  $N_c$  的统一解 [ 原式 (8b) 及 (8a) ] 为<sup>[8]</sup>：

$$N_q(\varphi, \psi) = \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\cos \psi} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \exp\left[\left(\frac{3\pi}{2} + \varphi - 2\psi\right) \cdot \tan \varphi\right] \quad (3-1)$$

$$N_c(\varphi, \psi) = \tan \psi + \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\cos \psi} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \cdot \{ (1 + \sin \varphi) \cdot \exp \left[ \left( \frac{3\pi}{2} + \varphi - 2\psi \right) \cdot \tan \varphi \right] - 1 \} \quad (3-2)$$

其中，基底完全光滑时取： $\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ ；基底完全粗糙时取： $\psi = \varphi$ 。

对于  $N_\gamma$ ，Terzaghi 未给出解析式及数值表，仅给出了曲线图。数值解需试算确定。

### 3 Terzaghi 模型极限承载力系数 CQ 完整解析解

程国勇，邱睿等根据极限平衡原理，导出了 Terzaghi 模型基底完全光滑及完全粗糙时承载力系数的 CQ 完整解析解<sup>[9, 10]</sup>：

$$N_q(\varphi, \psi) = \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\cos \psi} \cdot \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \exp \left[ \left( \frac{3\pi}{2} + \varphi - 2\psi \right) \cdot \tan \varphi \right] \\ = \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\cos \psi} \cdot \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \exp(2\alpha \cdot \tan \varphi) \quad (4-1)$$

$$N_c(\varphi, \psi) = \tan \psi + \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\cos \psi} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \cdot \{ (1 + 2 \sin \varphi) \cdot \exp \left[ \left( \frac{3\pi}{2} + \varphi - 2\psi \right) \cdot \tan \varphi \right] - 1 \} \\ = \tan \psi + \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\cos \psi} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \cdot [ (1 + 2 \sin \varphi) \cdot \exp(2\alpha \cdot \tan \varphi) - 1 ] \quad (4-2)$$

$$N_\gamma(\psi, \varphi) = \frac{-\tan \psi}{2} + \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\cos^2 \psi} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \exp \left[ 3 \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \psi \right) \cdot \tan \varphi \right] + \frac{-\cos(\psi - \varphi)}{2 \cos^2 \psi \cdot \cos \varphi} \cdot \left\{ \frac{-\sin \varphi - 3 \cos \psi \cdot \tan \varphi}{9 \tan^2 \varphi + 1} + \exp \left[ 3 \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \psi \right) \tan \varphi \right] \cdot \left[ \frac{3 \tan \varphi \cdot \cos \left( \pi - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right) + \sin \left( \pi - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right)}{9 \tan^2 \varphi + 1} \right] \right\} \quad (4-3)$$

其等价简化式为：

$$N_{\gamma}(\psi, \varphi) = \frac{-\tan \psi}{2} + \frac{\cos(\psi - \varphi)}{2 \cos^2 \psi \cdot \cos \varphi} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin \varphi + 3 \cos \psi \cdot \tan \varphi}{9 \tan^2 \varphi + 1} \\ + \exp \left[ 3 \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \psi \right) \tan \varphi \right] \\ \cdot \left[ \frac{3 \tan \varphi \cdot \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) - \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{9 \tan^2 \varphi + 1} + 2 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \end{array} \right. \quad (4-3-1)$$

## 4 Terzaghi 模型极限承载力系数探正

进一步研究发现，CQ 解析解式的  $N_c$ 、 $N_{\gamma}$  值异常。

本文在前人研究的基础上，用极限平衡理论重新对 Terzaghi 模型进行了推演探正。

Terzaghi 模型假定在基础在受到承载力  $p_u$  时，地基土达到极限平衡。其时，地基土出现连续滑动面，滑动土体可以分成三个区：I 区为弹性刚性核，滑裂面与水平面夹角  $\psi$ ；II 区为对数螺旋过渡区，夹角为  $\alpha$ ；III 区为朗肯被动区，滑裂面与水平面夹角  $\beta = \pi/4 - \varphi/2$ 。模型详见图 1。

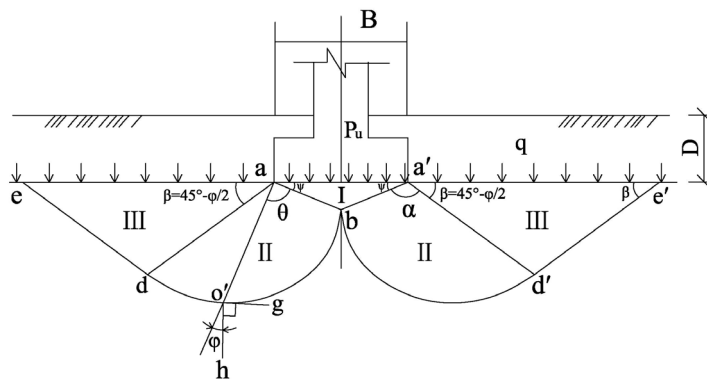


图 1 Terzaghi 极限承载力模型图

Figure 1 Terzaghi ultimate bearing capacity model

模型的几何参数:

I 区三角刚性核水平夹角:  $\psi$

II 区对数螺旋矢径夹角:  $\alpha = \frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \psi$      $\psi + \alpha = \frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} = \pi - (\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})$   
 $= \pi - \beta$

III 区朗肯被动土区水平夹角:  $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$

被动土压力  $E_p$  的竖向夹角:  $\lambda = \psi - \varphi$

在 II 区, 对数螺旋线矢径的竖向夹角:  $\eta = \frac{\pi}{2} - (\psi + \theta)$   
 对数螺旋线螺旋矢径方程为:

$$r = r_0 \cdot \exp(\theta \cdot \tan \varphi) \quad (5)$$

初始矢径长度为:

$$r_0 = \frac{B}{2} / \cos \psi = \frac{B}{2 \cos \psi} \quad (6)$$

终点矢径长度为:

$$r_n = r_0 \cdot \exp(\alpha \cdot \tan \varphi) = \frac{B}{2 \cos \psi} \cdot \exp(\alpha \cdot \tan \varphi) \quad (7)$$

### 4.1 Terzaghi 模型受力分析

分别取 I 区三角核及 II + III 区非三角核为隔离体, 其受力分析见图 2、图 3。

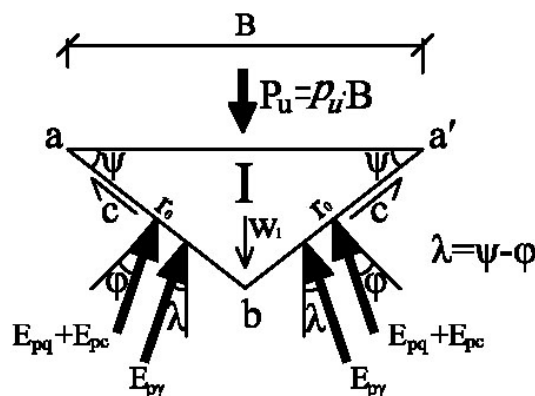


图 2 I 区三角刚性核受力图

Figure 2 Stress diagram of triangular rigid core in zone I

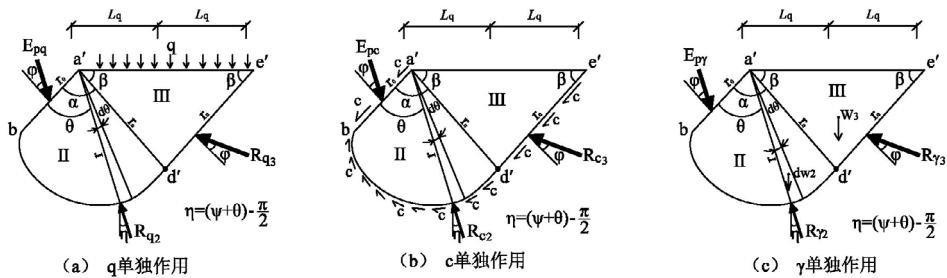


图 3 Terzaghi 模型 II + III 区受力图

Figure 3 Stress diagram of Terzaghi model in zone II + III

考察 I 区（三角刚性核），分析静力平衡及力矩平衡。

(1) 静力平衡方程

$$p_u \cdot B = 2E_p \cdot \cos \lambda + F_c - W \tag{8}$$

其中：

三角核底边总粘聚力的竖向分力：

$$F_c = 2 \left( c \cdot \frac{B}{2 \cos \psi} \cdot \sin \psi \right) = cB \cdot \tan \psi \tag{9}$$

三角核土体总重：

$$W = \gamma \cdot \left( r_0 \cdot \sin \psi \right) \cdot \frac{B}{2} = \frac{\gamma B^2}{4} \cdot \tan \psi \tag{10}$$

(2) 力矩平衡方程

被动土压力近似处理为超载  $q$ 、粘聚力  $c$ 、重力  $\gamma$  引起的被动土压力之和：

$$E_p = E_{pq} + E_{pc} + E_{p\gamma} \tag{11}$$

将三角刚性核底边作为挡土墙墙背，根据 Terzaghi 土压力理论，其被动土压力作用点可近似处理为：均布力的超载及粘聚力所引起的被动土压力的作用点为墙高的 1/2，三角分布的重力所引起的被动土压力作用点为墙高的 1/3。

以  $a'$  点作为力矩原点，根据图 3，可以得到超载  $q$ 、粘聚力  $c$ 、重力  $\gamma$  单独作用的力矩平衡方程：

$$E_{pq} \cdot \cos \varphi \cdot \frac{1}{2} r_0 = M_q \tag{12-1}$$

$$E_{pc} \cdot \cos \varphi \cdot \frac{1}{2} r_0 = M_c \tag{12-2}$$

$$E_{p\gamma} \cdot \cos \varphi \cdot \frac{2}{3} r_0 = M_\gamma \quad (12-3)$$

(3) 被动土压力

由(式12)就可得到被动土压力:

$$E_{pq} = 2 \frac{1}{r_0 \cdot \cos \varphi} \cdot M_q = \frac{4 \cos \psi}{B \cos \varphi} \cdot M_q \quad (13-1)$$

$$E_{pc} = 2 \frac{1}{r_0 \cdot \cos \varphi} \cdot M_c = \frac{4 \cos \psi}{B \cos \varphi} \cdot M_c \quad (13-2)$$

$$E_{p\gamma} = \frac{3}{2} \frac{1}{r_0 \cdot \cos \varphi} \cdot M_\gamma = \frac{3 \cos \psi}{B \cos \varphi} \cdot M_\gamma \quad (13-3)$$

(4) 极限承载力

由(8)、(9)、(10)、(11)可得到极限承载力表达式:

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{2 \cos \lambda}{B} \cdot E_{p+c} \cdot \tan \psi - \frac{\gamma B}{2} \cdot \frac{\tan \psi}{2} \\ p_u &= q \cdot \left( \frac{2 \cos \lambda}{qB} \cdot E_{pq} \right) + c \cdot \left( \tan \psi + \frac{2 \cos \lambda}{cB} \cdot E_{pc} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \gamma B \cdot \left( \frac{-\tan \psi}{2} + \frac{4 \cos \lambda}{\gamma B^2} \cdot E_{p\gamma} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

(5) 承载力系数

将式(14)与标准式(1)比照,就可得到承载力系数:

$$N_q = \frac{2 \cos \lambda}{qB} \cdot E_{pq} \quad (15-1)$$

$$N_c = \tan \psi + \frac{2 \cos \lambda}{cB} \cdot E_{pc} \quad (15-2)$$

$$N_\gamma = \frac{-\tan \psi}{2} + \frac{4 \cos \lambda}{\gamma B^2} \cdot E_{p\gamma} \quad (15-3)$$

式(15)中的  $q$ 、 $c$ 、 $\gamma$  单独作用的分项被动土压力  $E_{pq}$ 、 $E_{pc}$ 、 $E_{p\gamma}$ , 需考察非核心区(II + III区)的力矩平衡方程获取。

## 4.2 超载力 $q$ 单独作用

$q$  单独作用产生的力矩为:  $M_q = M_{q0} + M_{q2R} + M_{q3R}$

(1) 均布超载力矩  $M_{q0}$

由图3(a), 基底以上两侧土体按超载力计算:  $q = \gamma D$

超载力力臂:  $L_q = r_n \cdot \cos \beta$

超载力矩： $M_{q0} = (q \cdot 2L_q) \cdot L_q = 2q \cdot L_q^2$   
 $M_{q0} = 2q \cdot L_q^2 = 2q \cdot [r_n \cdot \cos \beta]^2 = 2q \cdot [r_n^2 \cdot \cos^2 \beta] = 2q \cdot r_n^2 \cdot \cos^2 \beta$

即有：

$$M_{q0} = \frac{qB^2}{2 \cos^2 \psi} \cdot \exp(2\alpha \cdot \tan \varphi) \cdot \cos^2 \beta \tag{16-1}$$

(2) II区超载力引起的反力力矩  $M_{q2R}$

II区超载反力  $R_{q2R}$  指向矢径，因此：

$$M_{q2R} = 0 \tag{16-2}$$

(3) III区超载力引起的反力力矩  $M_{q3R}$

III区为被动土区，竖向力  $q$  为小主应力，底边的法向均布应力为：

$$\sigma_{fq} = q \cdot \frac{\cos \varphi^2}{1 - \sin \varphi} = q \cdot (1 + \sin \varphi)$$

III区底边 (d'e' 段) 的超载反力为： $R_{q3} = \frac{\sigma_{fq}}{\cos \varphi} \cdot r_n$

力臂为： $L_{q3} = \frac{r_n}{2} \cdot \cos \varphi$

最后得到：

$$M_{q3R} = -R_{q3} \cdot L_{q3} = \frac{-qB^2}{8 \cos^2 \psi} \cdot \exp(2\alpha \cdot \tan \varphi) \cdot (1 + \sin \varphi) \tag{16-3}$$

因此，得到超载总力矩为：

$$M_q = M_{q0} + M_{q2R} + M_{q3R} = \frac{qB^2}{8 \cos^2 \psi} \cdot \exp(2\alpha \cdot \tan \varphi) \cdot (1 + \sin \varphi) \tag{17}$$

### 4.3 粘聚力 $c$ 单独作用

$c$  单独作用产生的力矩为： $M_c = M_{c2a} + M_{c2} + M_{c3} + M_{c2R} + M_{c3R}$

(1) II区斜边粘聚力力矩  $M_{c2a}$

由于粘聚力指向径向，故：

$$M_{c2a} = 0 \tag{18-1}$$

(2) II区对数螺旋边粘聚力力矩  $M_{c2}$

考察图3(b)，II区螺旋区，

$$dM_{c2} = r \cdot (c \cdot ds) = r \cdot (c \cdot rd\theta) = c \cdot r^2 \cdot d\theta$$



$$\begin{aligned}
 M_{c2} &= \int_0^\alpha c \cdot r^2 \cdot d\theta = \int_0^\alpha c \cdot \left[ \frac{B}{2 \cos \psi} \cdot \exp(\theta \cdot \tan \varphi) \right]^2 \cdot d\theta \\
 &= \frac{cB^2}{4 \cos^2 \psi} \cdot \int_0^\alpha \exp(2\theta \cdot \tan \varphi) \cdot d\theta \\
 &= \frac{cB^2}{8 \cos^2 \psi \cdot \tan \varphi} \cdot \int_0^\alpha \exp(2\theta \cdot \tan \varphi) \cdot d(2\theta \cdot \tan \varphi) \\
 M_{c2} &= \frac{cB^2}{8 \cos^2 \psi \cdot \tan \varphi} \cdot [\exp(2\alpha \cdot \tan \varphi) - 1] \quad (18-2)
 \end{aligned}$$

(3) III区底边粘聚力力矩  $M_{c3}$

考察图3(b), d'e'段,

$$M_{c3} = (c \cdot r_n) \cdot L_{c3} = (c \cdot r_n) \cdot (r_n \cdot \cos \varphi) = c \cdot r_n^2 \cdot \cos \varphi$$

即有:

$$M_{c3} = \frac{cB^2}{8 \cos^2 \psi \cdot \tan \varphi} \cdot \exp(2\alpha \cdot \tan \varphi) \cdot 2 \sin \varphi \quad (18-3)$$

(4) II区粘聚力引起的反力力矩  $M_{c2R}$

在II区底界上,粘聚力反力  $R_{c2}$  指向a'点,力臂为0,故:

$$M_{c2R} = 0 \quad (18-4)$$

(5) III区粘聚力引起的反力力矩  $M_{c3R}$

考察图3(b), III区,对底边粘聚力求力矩有:

$$\begin{aligned}
 M_{c3R} &= \int_0^{r_n} c \cdot (r_n - \xi) \cdot \cos \varphi d\xi = -\int_0^{r_n} c \cdot (\xi - r_n) \cdot \cos \varphi d\xi \\
 &= \frac{-1}{2} \cdot c \cdot r_n^2 \cdot \cos \varphi = \frac{-1}{2} \cdot c \cdot \left[ \frac{B}{2 \cos \psi} \cdot \exp(\alpha \cdot \tan \varphi) \right]^2 \cdot \cos \varphi
 \end{aligned}$$

得到:

$$M_{c3R} = \frac{-cB^2}{8 \cos^2 \psi \cdot \tan \varphi} \cdot \exp(2\alpha \cdot \tan \varphi) \cdot \sin \varphi \quad (18-5)$$

因此,可以得到粘聚力单独作用的总力矩:

$$\begin{aligned}
 M_c &= M_{c2a} + M_{c2} + M_{c3} + M_{c2R} + M_{c3R} \\
 &= \frac{cB^2}{8 \cos^2 \psi \cdot \tan \varphi} \cdot [\exp(2\alpha \cdot \tan \varphi) \cdot (1 + \sin \varphi) - 1] \quad (19)
 \end{aligned}$$

#### 4.4 体重力 $\gamma$ 单独作用

$\gamma$  单独作用产生的力矩为:  $M_\gamma = M_{\gamma 2} + M_{\gamma 3} + M_{\gamma R2} + M_{\gamma R3}$

(1) II区重力力矩  $M_{\gamma 2}$

考察图3(c), II区, 有:

$$M_{\gamma 2} = \int_0^\alpha -L_{\gamma 2} \cdot dW_{\gamma 2} = \int_0^\alpha \left( \frac{2r}{3} \cdot \sin \eta \right) \cdot \gamma \cdot \frac{r^2}{2} \cdot d\theta$$

$$= \frac{-\gamma B^3}{24 \cos^3 \psi} \int_0^\alpha \exp(3\theta \cdot \tan \varphi) \cdot \cos(\psi + \theta) d\theta$$

最后得到:

$$M_{\gamma 2} = \frac{\gamma B^3}{24 \cos^3 \psi} \cdot \left[ \frac{3 \cos \psi \tan \varphi + \sin \psi}{9 \tan^2 \varphi + 1} + \exp(3\alpha \tan \varphi) \cdot \frac{3 \tan \varphi \cos \beta - \sin \beta}{9 \tan^2 \varphi + 1} \right] \quad (20-1)$$

(2) III区重力力矩  $M_{\gamma 3}$

考察图3(c), III区, 有:

$$W_{\gamma 3} = \gamma \cdot (r_n \sin \beta) \cdot (r_n \cos \beta) = \frac{\gamma}{2} \cdot \sin(2\beta) \cdot r_n^2 = \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \varphi \cdot r_n^2$$

$$L_{\gamma 3} = r_n \cos \beta$$

则:

$$M_{\gamma 3} = L_{\gamma 3} \cdot W_{\gamma 3} = \frac{\gamma B^3}{16 \cos^3 \psi} \cdot \exp(3\alpha \tan \varphi) \cos \varphi \cos \beta \quad (20-2)$$

(3) II区重力引起的反力力矩  $M_{\gamma R2}$

土重力引起的反力指向矢径原点, 则:

$$M_{\gamma R2} = 0 \quad (20-3)$$

(4) III区重力引起的反力力矩  $M_{\gamma R3}$

考察图3(c), III区, 及图4, 有:

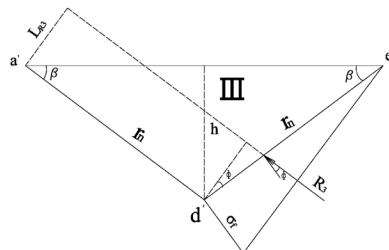


图4 III区  $M_{\gamma R3}$  计算要素图

Figure4  $M_{\gamma R3}$  Calculation elements in Zone III

土的自重应力:  $\sigma_z = \gamma \cdot z$

d' 的自重应力:  $\sigma_h = \gamma \cdot h$

由于Ⅲ区为朗肯被动土区, 水平应力为大主应力  $\sigma_1$ , 竖向应力为小主应力  $\sigma_3 = \sigma_h$ , 因此:

$$\sigma_1 = \sigma_3 \cdot \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + 2c \cdot \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \sigma_3 \cdot \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} + 2c \cdot \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

单独考虑重力作用时, 则不考虑粘聚力, 此时简化为:  $\sigma_1 = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \cdot \sigma_3$

则由 Mohr-Coulomb 定律, Ⅲ区 d'e' 边上的法向正应力为:

$$\begin{aligned} \sigma_f &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \cos \left[ 2 \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) \right] \\ &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_f &= \frac{1}{1 - \sin \varphi} \cdot \sigma_3 - \frac{\sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_3 \cdot \sin \varphi \\ &= (1 + \sin \varphi) \cdot \sigma_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_f &= (1 + \sin \varphi) \cdot \sigma_3 \\ &= (1 + \sin \varphi) \cdot \gamma h \\ &= (1 + \sin \varphi) \cdot \gamma (r_n \cdot \sin \beta) \end{aligned}$$

从而, Ⅲ区 d'e' 边上的抗力:

$$R_3 = \frac{1}{2} \cdot \left( 0 + \frac{\sigma_f}{\cos \varphi} \right) \cdot r_n = \frac{1}{2 \cos \varphi} \sigma_f \cdot r_n$$

反力力臂:  $L_{R3} = \frac{1}{3} \cdot r_n \cos \varphi$

因此, 土重力引起的Ⅲ区抗力力矩为:

$$\begin{aligned} M_{\gamma R3} &= -L_{R3} \cdot R_3 = -\frac{1}{3} \cdot r_n \cos \varphi \cdot \frac{1}{2 \cos \varphi} \sigma_f \cdot r_n = -\frac{1}{6} \cdot \sigma_f \cdot r_n^2 \\ M_{\gamma R3} &= \frac{-\gamma B^3}{48 \cos^3 \psi} \cdot \exp(3\alpha \cdot \tan \varphi) \cdot (1 + \sin \varphi) \cdot \sin \beta \end{aligned} \quad (20-4)$$

则土重力单独作用的总力矩为:

$$\begin{aligned} M_\gamma &= M_{\gamma 2} + M_{\gamma 3} + M_{\gamma R2} + M_{\gamma R3} \\ &= \frac{\gamma B^3}{24 \cos^3 \psi} \cdot \left\{ \begin{aligned} &\frac{3 \cos \psi \cdot \tan \varphi + \sin \psi}{9 \tan^2 \varphi + 1} + \exp(3\alpha \tan \varphi) \cdot \\ &\left[ \frac{3 \tan \varphi \cos \beta - \sin \beta}{9 \tan^2 \varphi + 1} + \frac{3 \cos \varphi \cos \beta - (1 + \sin \varphi) \sin \beta}{2} \right] \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (21)$$

## 4.5 被动土压力

由分项力矩 (17)、(19)、(21), 即可得到分项被动土压力:

$$E_{pq} = \frac{qB}{2 \cos \psi \cdot \cos \varphi} \cdot \exp(2\alpha \cdot \tan \varphi) \cdot (1 + \sin \varphi) \quad (22-1)$$

$$E_{pc} = \frac{cB}{2 \cos \psi \cdot \sin \varphi} \cdot [\exp(2\alpha \cdot \tan \varphi) (1 + \sin \varphi) - 1] \quad (22-2)$$

$$E_{p\gamma} = \frac{\gamma B^2}{8 \cos^2 \psi \cdot \cos \varphi} \cdot \left[ \begin{array}{l} \exp(3\alpha \tan \varphi) \cdot (\cos \varphi \cos \beta + \frac{3 \tan \varphi \cos \beta - \sin \beta}{9 \tan \varphi^2 + 1}) \\ + \frac{3 \tan \varphi \cos \psi + \sin \psi}{9 \tan \varphi^2 + 1} \end{array} \right] \quad (22-3)$$

## 4.6 承载力系数

由方程 (15) 及 (22) 就可得到本文承载力系数探正解 (CL 解析式):

$$N_q = \frac{\cos \lambda}{\cos \psi \cos \varphi} \cdot \exp(2\alpha \cdot \tan \varphi) \cdot (1 + \sin \varphi) \quad (23-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_c = \tan \psi + \frac{\cos \lambda}{\cos \psi \sin \varphi} \cdot [\exp(2\alpha \cdot \tan \varphi) \cdot (1 + \sin \varphi) - 1] \\ \lim_{\varphi \rightarrow 0} N_c = \frac{3\pi}{2} - 2\psi + \tan \psi + 1 \end{array} \right. \quad (23-2)$$

$$N_\gamma = \frac{-\tan \psi}{2} + \frac{\cos \lambda}{2 \cos^2 \psi \cdot \cos \varphi} \cdot \left[ \begin{array}{l} \frac{\sin \psi + 3 \cos \psi \cdot \tan \varphi}{9 \tan \varphi^2 + 1} \\ + \exp(3\alpha \tan \varphi) \cdot (\frac{3 \tan \varphi \cos \beta - \sin \beta}{9 \tan \varphi^2 + 1} + \cos \varphi \cos \beta) \end{array} \right] \quad (23-3)$$

## 5 承载力系数比照

对照探正解、T氏解析解及CQ解析解, 有如下结论:

(1) 承载力系数  $N_q$ , 探正解(23-1)与T氏解析解(3-1)、CQ解析式(4-1)、在数学上是等价的。

(2)  $N_c$  系数, 探正解(23-2)与T氏解析解(3-2)是一致的。

(3)  $N_c = (N_q - 1) \cdot \cot \varphi$  关系式对光滑基底及粗糙基底均成立。

$N_\gamma$  系数, 天津大学教材给出过基底完全粗糙时的数值表<sup>[13]</sup>, 但引用来源及数值正确性不明。本文探正解值与天津大学数表值, 其曲线图变化趋势相似,

但数值有一定差异，详见表1及图5。天津大学引用的数表值与本文探正值的数值差异原因有待进一步探究。

表1 Terzaghi 模型完全粗糙基底承载力系数比较表

Table 1 Comparison of bearing capacity coefficient of complete rough foundation of Terzaghi model<sup>[11]</sup>

$\varphi$ 摩擦角 deg	$N_q$		$N_c$		$N_\gamma$			
	数表值	T氏解析解 式(3-1)	探正解 式(23-1)	数表值	T氏解析解 式(3-2)	探正解 式(23-2)	数表值	探正解 式(23-3)
0	1	1.0000	1.0000	5.7	5.7124	5.7124	0	0.0000
2	1.22	1.2200	1.2200	6.5	6.3004	6.3004	0.23	0.1198
4	1.48	1.4873	1.4873	7	6.9684	6.9684	0.39	0.2827
6	1.81	1.8125	1.8125	7.7	7.7301	7.7301	0.63	0.5019
8	2.2	2.2090	2.2090	8.5	8.6022	8.6022	0.86	0.7948
10	2.68	2.6936	2.6936	9.5	9.6049	9.6049	1.2	1.1848
12	3.32	3.2878	3.2878	10.9	10.7632	10.7632	1.66	1.7029
14	4	4.0188	4.0188	12	12.1076	12.1076	2.2	2.3914
16	4.91	4.9217	4.9217	13.6	13.6764	13.6764	3	3.3078
18	6.04	6.0419	6.0419	15.5	15.5172	15.5172	3.9	4.5313
20	7.42	7.4387	7.4387	17.6	17.6903	17.6903	5	6.1717
22	9.17	9.1905	9.1905	20.2	20.2721	20.2721	6.5	8.3832
24	11.4	11.4011	11.4011	23.4	23.3613	23.3613	8.6	11.3844
26	14.2	14.2104	14.2104	27	27.0853	27.0853	11.5	15.4895
28	17.8	17.8082	17.8082	31.6	31.6117	31.6117	15	21.1557
30	22.4	22.4557	22.4557	37	37.1624	37.1624	20	29.0579
32	28.7	28.5166	28.5166	44.4	44.0357	44.0357	28	40.2089
34	36.6	36.5044	36.5044	52.8	52.6374	52.6374	36	56.1542
36	47.2	47.1560	47.1560	63.6	63.5283	63.5283	50	79.2979
38	61.2	61.5460	61.5460	77	77.4954	77.4954	90	113.4579
40	80.5	81.2708	81.2708	94.8	95.6630	95.6630	130	164.8388
45	173	173.2851	173.2851	172	172.2851	172.2851	326	456.1172

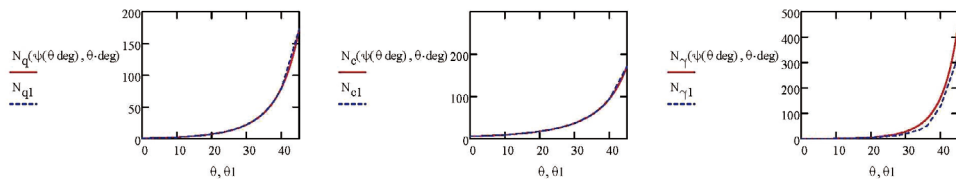


图5 Terzaghi 模型完全粗糙基底承载力系数数表值与 CL 解析解对比曲线图

Figure 5 Comparison curve of bearing capacity coefficient of Terzaghi model with CL analytical solution

## 6 结论

Terzaghi 于 1943 年给出了 Terzaghi 模型对于基底完全光滑及基底完全粗糙时的通解,但未给出承载力系数  $N_\gamma$  的显式解,也未给出数表值,仅给出了曲线图。程国勇、邱睿 2011 年发表了 Terzaghi 模型的 CQ 完整解析解,但  $N_c$ 、 $N_\gamma$  数值异常,公式有错漏。本文基于 Terzaghi 最初的计算模型及假定,经详细推演得到了 Terzaghi 模型极限承载力系数的探正解 (CL 解析解),修正了程国勇——邱睿给出的承载力系数 CQ 解析解中  $N_c$ 、 $N_\gamma$  系数的解析式错误。

(1)  $N_q$ 、 $N_c$  系数的探正解与 Terzaghi 模型的 T 氏解析解在数学上等同。

(2)  $N_c = (N_q - 1) \cdot \cot \varphi$  关系式对光滑基底及粗糙基底均成立。

(3)  $N_\gamma$  系数粗糙基底的探正解与天津大学给出的数表值对比表明,曲线变化相似,数值有一定差异。天津大学引用的数表值与本文探正值的差异原因有待进一步探究。

## 参考文献

- [1] 钱家欢,殷宗泽. 土工原理与计算(第2版)[M]. 北京:中国水利水电出版社,1996:347-357.
- [2] 谢定义,姚仰平,党发宁. 高等土力学[M]. 北京:高等教育出版社,2008:324-340.
- [3] 高大钊,袁聚云. 土力学与土质学(第3版)[M]. 北京:人民交通出版社,2001:192-199.
- [4] 钱德玲. 土力学[M]. 北京:中国建筑出版社,2009:194-207.
- [5] 卢廷浩,刘祖德,等. 高等土力学[M]. 北京:机械工业出版社,2006:262-272.
- [6] 薛守义. 高等土力学[M]. 北京:建筑工业出版社,2007:135-142.
- [7] 谢定义,刘奉银. 土力学教程[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2010:134-145.
- [8] K. 太沙基. 理论土力学[M]. 北京:地质出版社,1960:131-136.

- [9] 程国勇, 邱睿, 段淳. 基底完全粗糙时太沙基地基承载力系数的解析解 [J]. 中国民航大学学报, 2011, 29(1).
- [10] 邱睿, 程国勇, 等. 泰沙基地基承载力系数的完整解析解 [J]. 西部探矿工程, 2011(8).
- [11] 天津大学. 土力学与地基 [M]. 北京: 人民交通出版社, 1980: 224.

## Correct Analytical Solution of Ultimate Bearing Capacity Coefficient of Terzaghi Model

Liu Dahai<sup>1,2</sup> Cheng Guoyong<sup>3</sup>

1. *Shenzhen Geological Bureau, Shenzhen;*

2. *Shenzhen Geological Construction Engineering Company, Shenzhen;*

3. *Airport College of Civil Aviation University of China, Tianjin*

**Abstract:** In 1943, Terzaghi gave the general solution of Terzaghi model when the base is completely smooth and rough, but did not give the analytical solution of the bearing capacity coefficient  $N_\gamma$ , nor the table value, only the curve. Cheng Guoyong and Qiu Rui published the CQ complete analytical solution of Terzaghi model in 2011, but the  $N_c$  and  $N_\gamma$  coefficients are abnormal, and the formula has errors and omissions. In this paper, based on the previous studies, the correct analytical solution of the ultimate bearing capacity coefficient of Terzaghi model is obtained by using the principle of limit equilibrium.

**Key word:** Terzaghi model; Bearing capacity coefficient; Ultimate bearing capacity; Correct analytical solution