

The feasibility of differential evolution algorithm to solve the problem of set partition

Hua Wen

Shandong University, Jinan

Abstract: Set partitioning problem is the typical NP problem in combinatorial optimization. The article establishes a set partitioning problem model, and solves it by using differential evolution algorithm. By computing simulation cases in the literature and comparing the result, it indicates that the algorithm for solving set partitioning problem is feasible and effective.

Key words: differential evolution algorithm; set partitioning problem; combinatorial optimization

Received: 2020-03-24; Accepted: 2020-04-08; Published: 2020-04-10

差异演化算法解决集合划分问题的可行性探讨

华 文

山东大学，济南

邮箱: whua.98@163.com

摘 要: 集合划分问题是组合优化中典型的 NP 难题，建立了集合划分问题模型，采用差异演化算法对其进行求解。通过对其他文献中仿真实例的计算和结果对比，表明了算法对求解集合划分问题的可行性和有效性。

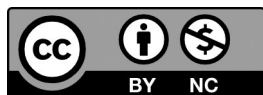
关键词: 差异演化算法；集合划分问题；组合优化

收稿日期：2020-03-24；录用日期：2020-04-08；发表日期：2020-04-10

Copyright © 2019 by author(s) and SciScan Publishing Limited

This article is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>



1 引言

集合划分问题是组合优化领域中一个典型的 NP 难问题，它是指把 m 个正

数组成的集合 A 划分成 n 个互不相交的子集 A_1, A_2, \dots, A_n , 要求这些子集中的各元素之和 S_1, S_2, \dots, S_n 中的最大者尽可能的小。由于它是许多实际问题的抽象, 如存储分配问题、多处理机调度问题、财产分配问题等, 因而得到了广泛的应用。目前对该问题的求解主要有粒子群优化算法、蚁群算法、遗传算法等。本文采用差异演化算法来求解集合划分问题, 并与文献 [1] 中求解结果进行比较。

2 集合划分问题模型

已知 A 的第 i 个元素为 a_i ($i=1, 2, \dots, m$), 若元素 a_i 被分配到子集合 j 中, 则令 $x_{ij}=1$, 否则 $x_{ij}=0$ 。 $\sum_{i=1}^m x_{ij}a_i$ 表示子集合 j 的元素和, $\sum_{j=1}^n x_{ij}=1$ 表示元素 a_i 只能分配到一个子集合中, 其数学模型如下:

$$\begin{aligned} \min \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m x_{ij} a_i \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (1)$$

3 差异演化算法

差异演化算法 (Differential Evolution, DE) 是 Rainer Storn 和 Kenneth Prince 提出的一种基于群体差异的演化算法。差异演化算法具有收敛速度快、操作简单、易编程实现、极强的稳健性等优点, 在首届 IEEE 演化计算大赛中, 差异演化算法表现超群, 随后在各领域得到了广泛的应用。差异演化算法的整体结构类似于遗传算法, 与遗传算法的主要区别在变异操作上, 差异演化算法的变异操作是基于染色体的差异向量进行的, 其余操作和遗传算法类似。下面通过求解非线性函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的最小值问题, x_j 满足 $x_j^L \leq x_j \leq x_j^U, j=1, 2, \dots, n$, 来介绍差异演化算法的操作过程:

令 $x_i(t)$ 是第 t 代的第 i 个染色体则 $x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t))$, $i=1, 2, \dots, M; t=1, 2, \dots, t_{\max}$ 。其中, n 是染色体的长度, 即变量的个数, M 为群体规模, t_{\max} 是最大的进化代数。

①生成初始种群。在 n 维空间里随机产生满足约束条件的 M 个染色体, 实施如下措施:

$$x_{ij}(0) = \text{rand}_{ij}(0, 1) \left(x_{ij}^U - x_{ij}^L \right) + x_{ij}^L \quad (2)$$

$i=1, 2, \dots, M; j=1, 2, \dots, n$

其中 x_{ij}^U 与 x_{ij}^L 分别是第 j 个变量上界和下界, $\text{rand}_{ij}(0, 1)$ 是 $[0, 1]$ 之间的随机小数。

②变异操作。从群体中随机选择3个染色体 x_{p1}, x_{p2}, x_{p3} 且 ($i \neq p1 \neq p2 \neq p3$), 则 $h_{ij}(t+1) = x_{p1j}(t) + \lambda (x_{p2j}(t) - x_{p3j}(t))$ (3)

$x_{p2j}(t+1) - x_{p3j}(t+1)$ 为差异化向量, λ 为缩放因子。

③交叉操作。交叉操作是为了增加群体的多样性, 具体操作如下:

$$v_{ij}(t+1) = \begin{cases} h_{ij}(t+1) & \text{rand}_{ij}(0,1) \leq pc \text{ 或 } j = \text{rand}(i) \\ x_{ij}(t) & \text{rand}_{ij}(0,1) > pc \text{ 且 } j \neq \text{rand}(i) \end{cases} \quad (4)$$

$\text{rand}_{ij}(0, 1)$ 是在 $[0, 1]$ 之间的随机小数, pc 为交叉概率, $pc \in [0, 1]$, $\text{rand}(i)$ 为在 $[1, n]$ 之间的随机整数, 这种交叉策略可确保 $x_i(t+1)$ 至少有一分量由 $h_i(t+1)$ 的相应分量贡献。

④选择操作。为了决定 $x_i(t)$ 是否成为下一代的成员, 向量 $v_i(t+1)$ 和目标向量 $x_i(t)$ 对评价函数进行比较:

$$\begin{cases} v_i(t+1), f(v_{i1}(t+1), \dots, v_{in}(t+1)) < f(x_{i1}(t+1), \dots, x_{in}(t+1)) \\ x_i(t), f(v_{i1}(t+1), \dots, v_{in}(t+1)) \geq f(x_{i1}(t+1), \dots, x_{in}(t+1)) \end{cases} \quad (4)$$

反复执行 b. 至 d. 操作, 直至达到最大的进化代数 t_{\max} 。

4 求解集合划分问题的差异演化算法

集合划分问题是非连续的离散优化问题, 而上述的差异演化算法适用于连续优化问题。因此, 针对集合划分问题的具体特点, 本文设计了一种用差异演化算法来对其进行求解的思路。具体操作过程如下: 选择初始种群的取值在区间 $[-x_{\max}, x_{\max}]$, 为了使差异演化算法可以求解离散优化问题, 首先将区间分成 n 个相等子区间, 当连续变量的取值属于某一区间时, 表明该变量对应的元素放入相应的子集合内。例如设 $A = \{81, 40, 26, 4, 65, 98, 53, 71, 15\}$, 共9个数据, 分成3个子集合, 即 $m=9, n=3$ 。令 $x_{\max}=6$, 分成三个相等的区间 $[-6, -2), [-2, 2), [2, 6]$, 当种群中第 k 个个体的第 i 个连续变量属于区间 $[-6, -2)$ 时, 元素 a_i 被分配到子集合 1 中; 第 i 个连续变量属于区间 $[-2,$

2) 时, 元素 a_i 被分配到子集合 2 中; 第 i 个连续变量属于区间 $[2, 6]$ 时, 元素 a_i 被分配到子集合 3 中。与函数优化问题不同的是, 变量的上界 x_{\max} 没有给出, 需要自己设定, 经过实验发现, 求得问题解的好坏和收敛性对上下界的变化不敏感, 本文中选取 x_{\max} 为 6。

5 结论

通过利用差异演化算法对集合划分问题进行求解, 说明了差异演化算法应用于该类问题的可行性。由于差异演化算法的研究还处于初期, 目前仍有许多问题需要进一步的研究, 例如算法的收敛性、理论依据等。但从当前的应用效果来看, 差异演化算法无疑具有十分光明的前景, 进一步拓展差异演化算法新的应用领域仍是一项非常有意义的工作。

参考文献

- [1] 高尚, 侯志远. 集合划分问题的粒子群优化算法 [J]. 江苏科技大学学报 (自然科学版), 2005, 19 (6): 41-44.
- [2] 高尚, 侯志远. 集合划分问题的蚁群算法 [J]. 航空计算技术, 2006, 36 (2): 720-722.
- [3] 鲍江宏, 李炯城. 基于遗传算法的集合划分问题求解 [J]. 计算机工程与设计, 2008, 29 (11): 2879-2882.