理论数学前沿
2020 年 3 月第 2 卷第 1 期

On the properties of subspace lattice in linear algebra

Sun Miaoyu

Hubei Normal University, Huangshi

Abstract: Based on the concept of linear subspace in advanced algebra, we give the definition of the subspace lattice, explore some properties of it, and obtain several interesting conclusions.

Key words: partially ordered set; subspace; intersection; sum

Received: 2020-01-26; Accepted: 2020-02-10; Published: 2020-02-12

线性代数中子空间格的性质探究

孙妙玉

湖北师范大学，黄石

邮箱：mysun.98@hotmail.com

文章引用：孙妙玉．线性代数中子空间格的性质探究［J］．理论数学前沿，2020，2（1）：8–13.
https://doi.org/10.35534/tms.0201002

摘　要：在高等代数线性子空间概念的基础上，给出子空间格的定义，并探究了子空间格的一些性质，得出几个有趣的结论。

关键词：偏序集；子空间；交；和

收稿日期：2020-01-26；录用日期：2020-02-10；发表日期：2020-02-12

格的概念，首先由戴德金（Dedekind）定义，但直到 1930 年前后才受到人们的注意。除了代数上的应用以外，在几何基础及其他方面还发现许多应用。本文先给出了线性子空间格的概念，然后讨论了子空间格的相关性质并得出一些有趣的结论。

1　子空间格的概念

定义 1　集合 S 上的一个关系，记作≤，叫做一个偏序，如果≤满足

1）反身性 $a \leqslant a$ 对所有 $a \in S$；

2）反对称性若 $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant a$，则 $a=b$；

3）传递性若 $a \leqslant b$ 及 $b \leqslant c$，则 $a \leqslant c$。

命题 1　数域 P 上向量空间 V 的子空间全体 $\mathscr{L}$ 关于集合的包含关系是一个偏序集合。

事实上，对于 $\mathscr{L}$ 里各对 W_1，W_2 定义了关系 $W_1 \subseteq W_2$，而且

1）$W \subseteq W$；

2）如果 $W_1 \subseteq W_2$，$W_2 \subseteq W_1$，则 $W_1=W_2$；

3）如果 $W_1 \subseteq W_2$，而 $W_2 \subseteq W_3$，则 $W_1 \subseteq W_3$。所以这关系是反身、反对称与传递的。

定义 2　如果一个偏序集合里任意两个元素都有一个最大下界与一个最小上界时，这个偏序集合叫做格。

定理 1　设 W_1，W_2 是 V 的任意两个子空间，交 $W_1 \cap W_2$ 也是 V 的一个子空间。

命题 2　设 W'，W_1，W_2 都是线性空间 V 的子空间，若 W' W_1，W' W_2，则 W' $W_1 \cap W_2$。即这个空间“$W_1 \cap W_2$”关于包含关系起了最大下界的作用。

证明：显然有 $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1$，$W_1 \cap W_2 \subseteq W_2$，任意 $\alpha \in W'$，则由 $W' \subseteq W_1$，$W' \subseteq W_2$，得 $\alpha \in W_1$，$\alpha \in W_2$，则 $\alpha \in W_1 \cap W_2$，于是 $W' \subseteq W_1 \cap W_2$，即 $W_1 \cap W_2$ 是含于 W_1 与 W_2 里的子空间的最大下界。

下面的例子说明 V 的两个子空间 W_1，W_2 的集合论上的并 $W_1 \cup W_2$ 不一定是一个子空间。

例 1　设 $V=P^{n\times n}$ 的子空间 $W_1=\{P$ 上的 n 级对称阵$\}$；$W_2=\{P$ 上的 n 级对角阵$\}$；$W_3=\{P$ 上的 n 级上三角阵$\}$，则 $W_1 \cup W_2$ 是 V 的子空间，$W_1 \cup W_3$ 不是 V 的子空间。

定义 3　由集合 $W_1 \cup W_2$ 生成的集合 $[W_1 \cup W_2]$ 来代替这个集合，并且用 W_1+W_2 表示这个集合，把它叫做 W_1 与 W_2 的和。

由　W_1+W_2 即为 $[W_1 \cup W_2]$ 的定义可知，这个是形如 $\alpha_1+\alpha_2$ 的向量的集合，这里 $\alpha i \in Vi$，$i=1$，2。

定理 2　[2] 如果 W_1 与 W_2 是线性空间 V 的子空间，那么它们的和 W_1+W_2 也是 V 的线性子空间。对于子空间的“∩”及“+”，满足下面的一般维数关系。

定理 3 [2] 如果 W_1，W_2 是线性空间 V 的两个子空间，那么

$$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim W_1 \cap W_2。$$

这里 $\dim W$ 表示 W 的维数。

命题 3　设 W'，W_1，W_2 都是线性空间 V 的子空间，若 $W' \supseteq W_1$，$W' \supseteq W_2$，则 $W' \supseteq (W_1+W_2)$。即这个空间“W_1+W_2”关于包含关系起了具有最小上界的作用。

证明：任意 $\alpha \in W_1+W_2$，则 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，其中 $\alpha_1 \in W_1$，$\alpha_2 \in W_2$，由 $W' \supseteq W_1$，$W' \supseteq W_2$，得 $\alpha_1 \in W'$，$\alpha_2 \in W'$，所以 $\alpha=(\alpha_1+\alpha_2) \in W'$，故 $W' \supseteq (W_1+W_2)$。显然 $(W_1+W_2) \supseteq W_1$，$(W_1+W_2) \supseteq W_2$，即 W_1+W_2 是包含 W_1 及 W_2 里的子空间的

最小上界。

我们把$\mathscr{L}$叫做空间 V 的子空间格。

2 子空间格的性质

首先是下列各性质在任意格都成立。

性质 1 结合律及交换律对于子空间的“∩”及“+”成立。即

$W_1 \cap W_2=W_2 \cap W_1$；

$(W_1 \cap W_2) \cap W_3=W_1 \cap (W_2 \cap W_3)$。

$W_1+W_2=W_2+W_1$；

$(W_1+W_2)+W_3=W_1+(W_2+W_3)$。

其次是格$\mathscr{L}$的一些特有性质。

性质 2 $\mathscr{L}$至少存在有一个零元素，亦即元素 O，使对于所有子空间 W，

$W \cap O=O$，及 $W+O=W$。

只由 O 向量构成的子空间具有这些性质与此相对的整个空间 V 有“全”元素的作用，亦即对于所有 W 使

$W+V=V$ 及 $W \cap V=W$。

注：分配律 $W_1 \cap (W_2+W_3)=W_1 \cap W_2+W_1 \cap W_3$ 在 L 里一般不能成立。

例 2 令过原点的两条不同直线 l_1，l_2 分别构成一维子空间 W 和 U，则 $X=W+U$ 是二维子空间，在 l_1，l_2 决定的平面上，过原点的另一条不与 l_1，l_2 相同的直线 l_3 构成一维子空间 Y，显然，$Y \subset X$，所以 $Y=Y \cap X=Y \cap (W+U)$，但 $Y \cap W=O$，$Y \cap U=O$，因此 $Y \cap W+Y \cap U=O$，于是 $Y \cap (W+U) \neq Y \cap W+Y \cap U$。

这就可见分配律不成立。在这里将指出较弱的分配律在$\mathscr{L}$里成立，这就是下面的法则：

性质 3 设 W_1，W_2，W_3 是线性空间 V 的子空间，如果 $W_1 \supseteq W_2$，则

$W_1 \cap (W_2+W_3)=W_1 \cap W_2+W_1 \cap W_3=W_2+W_1 \cap W_3$。

证明：由于 $W_1 \supseteq W_2$，所以 $W_1 \cap W_2=W_2$，即有 $W_1 \cap W_2+W_1 \cap W_3=W_2+W_1 \cap W_3$。

首先，因为 $W_1 \cap W_2$ $W_1 \cap (W_2+W_3)$ 及 $W_1 \cap W_3$ $W_1 \cap (W_2+W_3)$，

 https://doi.org/10.35534/tms.0201002

所 以 $W_1 \cap W_2+W_1 \cap W_3\ W_1 \cap (W_2+W_3)$。 其 次， 设 $\alpha \in W_1 \cap (W_2+W_3)$， 则 $\alpha=\alpha_1 \in W_1$ 与 $\alpha=\alpha_2+\alpha_3$， 这 里 $\alpha_2 \in W_2$，$\alpha_3 \in W_3$。所 以 $\alpha_3=\alpha-\alpha_2=\alpha_1-\alpha_2 \in W_1+W_2=W_1$， 故 $\alpha_3 \in W_1 \cap W_3$， 而 $\alpha=\alpha_2+\alpha_3 \in W_2+W_1 \cap W_3$。

这就证明了 $W_1 \cap (W_2+W_3)\ W_2+W_1 \cap W_3$，所以

$W_1 \cap (W_2+W_3)=W_1 \cap W_2+W_1 \cap W_3=W_2+W_1 \cap W_3$。

这里要指出$\mathscr{L}$是一个有余格，亦即下面性质成立。

性质 4 命题 4 对于$\mathscr{L}$里任意的 W，在$\mathscr{L}$里存在有一个 W^* 使

$W+W^*=V$，$W \cap W^*=O$。证明：如果 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha r\}$ 是 W 的一个基，则这些向量是线性无关的。因此可用向量 $\alpha^{r+1}, \cdots, \alpha_n$ 补充以得 V 的一个基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$。令 $W^*=[\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n]$， 则 $W+W^*=[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]=V$。不仅如此，$W \cap W^*$ 任意向量 α 是对于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是线性相关的，也对于 $\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$ 是线性相关的。因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是线性无关的，所以 $\alpha=0$。故 $W \cap W^*=O$。适合上面条件的子空间 W^* 叫做 V 的子空间 W 的余空间。

命题 4 若 W 是 n 维线性空间 V 的任意子空间，且 $W \neq V$，也 $W \neq O$，则 W 的余空间不唯一。

证明：由题意可设 $\dim W=r<n$，取 W 的一组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$，并可用向量 $\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$ 补充以得 V 的一个基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$，令 $W^*=[\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n]$，则 $W+W^*=[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]=V$。

再令 $W'=[\alpha r+\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}\cdots, \alpha_n]$，易知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_r+\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_n$ 线性无关。否则，可得 $\alpha_r+\alpha_{r+1}$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_n$ 线性表出，即

$\alpha_r+\alpha_r+_1=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k_{r+2}\alpha_{r+2}+\cdots+k_n\alpha_n$。从而 $\alpha_{r+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r-\alpha_r+k_r+_2\alpha_{r+2}+\cdots+k_n\alpha_n$， 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_n$ 线性无关矛盾，从而也是 V 的一个基，且 $W+W'=V$。但 $\alpha_r \notin W^*$，$\alpha_{r+1} \in W^*$，有 $\alpha_r+\alpha_{r+1} \notin W^*$，而 $\alpha_r+\alpha_{r+1} \in W'$，所以 $W^* \neq W'$。而 W^*，W' 都是 W 的余空间。结论得证。

需要提到下面的链条件在里成立。

性质 5　如果 $W_1 ! W_2 !\cdots$是子空间的一个无限降链，则有一个整数 r 存在，使 $Wr=Wr+_1=\cdots$

如果 W_1 $W_2\cdots$是子空间的一个无限升链，则有一个整数 r 存在，使 $W_r=W_{r+1}=\cdots$

因为子空间的维数是一个非负整数，并且因为 $W\notin W'$ 可推得 $\dim W \geqslant \dim W'$，所以这两个条件是显然成立的。

参考文献

[1] 聂灵沼，丁石孙．代数学引论［M］．北京：高等教育出版社，2000.

[2] 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组．高等代数［M］．北京：高等教育出版社，2003.

https://doi.org/10.35534/tms.0201002