理论数学前沿
2020 年 3 月第 2 卷第 1 期

Analysis of several calculus solutions

Jiang Xin

Soochow University, Suzhou

Abstract: It is no doubt how to problem-solving for the importance to learn calculus. It is more common phenomenon for the beginners not to start to solve questions. In this paper, for the types of typical problems in calculus, systematically summed up the general method of solution, and gives some typical examples.

Key words: Calculus; Typical problems; Method; Problem-solving formula

Received: 2020-01-02; Accepted: 2020-01-17; Published: 2020-01-19

几种微积分解题定式解析

蒋　欣

苏州大学，苏州

邮箱：xj_298@163.com

文章引用：蒋欣．几种微积分解题定式解析［J］．理论数学前沿，2020，2（1）：1–7.
https://doi.org/10.35534/tms.0201001

摘　要：无穷小量阶的问题用等价无穷小代换定阶法、泰勒公式（Taylor）定阶法、求导定阶法解题；函数零点或方程实根或两曲线交点的存在性问题，要先找函数再定区间，然后用介值定理或罗尔定理；积分区间关于原点对称的定积分，要想到考查被积函数及其代数和的每一部分是否具有奇偶性；被积函数为周期函数的定积分，要想到考查积分区间是否为整数倍的周期，以简化计算。

关键词：微积分；典型问题；解题定式

收稿日期：2020–01–02；录用日期：2020–01–17；发表日期：2020–01–19

1　引言

如何解题对于学好微积分的重要性毋庸置疑，而许多学生见到稍难一点的题目就无从下手，不知如何思考，没有一点思路，这样就影响了学习的积极性。美国著名数学大师波利亚在其名著《怎样解题》中把解题分为“理解题目，拟定方案，执行方案，回顾”等四步，其中“我应该从哪里开始？我能想到什么？我能做什么？”等问题贯穿于四步之中，对解题过程进行了很好的诠释 . 但其涉及大学数学知识很少，而且讲得稍显宏观，所以笔者尝试从微观的角度就微积分中的一些问题，把“我应该从哪里开始？我能想到什么？我能做什么？”细化，也就是笔者所说的解题定式。

2　解题定式与范例

2.1　无穷小量阶的问题

解题定式 1　见到确定无穷小量阶的问题就想“三法”——等价无穷小代换定阶法、泰勒公式（Taylor）定阶法、求导定阶法。

定式解读　微积分教材中关于比较无穷小量阶这类问题的基本解法是通过求解“$\frac{0}{0}$”型未定式极限$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$，由此极限的结果来判定的，其中$\alpha(x)$,$\beta(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小量。这个方法当$\alpha$（$x$），$\beta$（$x$）的$x\to x_0\beta$（$x$）形式比较复杂，或者无穷小量的个数较多时比较繁琐，事实上，可利用解题定式 1 中的方法来确定无穷小量的阶，从而快速、准确地求解有关无穷小量阶的问题。

所谓等价无穷小代换定阶法就是利用常用的等价无穷小来确定无穷小量的阶。例如$x\to 0$时，由于$\sin x\sim x$, $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，故$x\to 0$时，sinx 是$x$的 1 阶无穷小，1−cosx 是$x$的 2 阶无穷小，等等。

所谓泰勒公式定阶法就是利用皮亚诺（Peano）型余项的泰勒公式确定无穷小量的阶，其一般结论如下。

定理 2.1　设函数f（x）在邻域U（0，δ）内有定义，若f（x）在x=0 处的皮亚诺型余项泰勒公式为$f(x)=Cx^n+o(x^n)$，其中C是不为零的常数，n是大于零的常数，则当$x\to 0$时，$f(x)\sim Cx^n$，即f（x）是x的n阶无穷小量。

此定理利用无穷小量阶的概念和极限的四则运算法则不难证明。由此结论容易得到以下推论。

推论 2.1　设 α（x），β（x）是自变量x同一变化过程中的无穷小量，则

$\alpha(x)\pm\beta(x)\sim\max\{\alpha(x),\beta(x)\}$,

其中$\max\{\alpha(x),\beta(x)\}$表表示$\alpha$（$x$），$\beta$（$x$）中的低阶无穷小量部分。

此推论可推广到有限个无穷小量的代数和的情形，即有限个无穷小量的代数和，其阶仅取决于其中的最低阶部分。例如，$x\to 0$时，$3x-\ln(1+x^2)+2x^3\sim 3x$。

推论 2.2　有限个无穷小量的代数和，当其中的最低阶部分的无穷小量不相互抵消时，可利用等价无穷小代换确定该无穷小量的阶。例如，$x\to 0$时，

https://doi.org/10.35534/tms.0201001

$x-\sin 2x+e^{3x}-1\sim 2x$。

所谓求导定阶法就是通过求导数确定无穷小量的阶，其一般结论如下。

定理 2.2　设$\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$，且 $\alpha(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内可导。

（1）若 $x\to 0$ 时，$\alpha'(x)\sim x^k$（$k>0$，常数），则$\alpha(x)\sim\dfrac{x^{k+1}}{k+1}$；

（2）若$\lim\limits_{x\to 0}\alpha'(x)=C$（$C\neq 0$，常数），则 $\alpha(x)\sim Cx$。

此定理可由洛必达法容易证明。当利用等价无穷小代换定阶法、泰勒公式定阶法无法确定无穷小量的阶时，求导定阶法往往能发挥一定的作用。

例 1　试问 $x\to 0$ 时，无穷小量$\alpha(x)=e^{x^2}-\cos x$，$\beta(x)=(1+\tan\dfrac{x}{2})^{3x}-1$，$\gamma(x)=x^3-\ln(1+2x)$，$\delta(x)=x-\arcsin x$中，哪个是最高阶的？哪个是最低阶的？有无同阶的？有无等价的？

解　$x\to 0$ 时，对于 $\alpha(x)$，由推论 2.2 可知

$$\alpha(x)=e^{x^2}-\cos x=e^{x^2}-1+1-\cos x\sim\frac{3}{2}x^2;$$

对于 $\beta(x)$，由等价无穷小代换，得

$$\beta(x)=(1+\tan\frac{x}{2})^{3x}-1=e^{3x\ln(1+\tan\frac{x}{2})}-1\sim 3x\ln(1+\tan\frac{x}{2})\sim\frac{3}{2}x^2;$$

对于 $\gamma(x)$，由推论 2.1 可知

$$\gamma(x)=x^3-\ln(1+2x)\sim 2x;$$

对于 $\delta(x)$，根据求导定阶法，因

$$\delta'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}}\sim\frac{1}{2}x^2,$$

故$\delta(x)\sim-\dfrac{1}{6}x^3$。

综上可知，当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 都是 x 的 2 阶无穷小量，且为等价的无穷小量；$\gamma(x)$ 是 x 的 1 阶无穷小量，在四个无穷小量中阶最低；$\delta(x)$ 是 x 的 3 阶无穷小量，在四个无穷小量中阶最高。

2.2　函数零点问题

解题定式 2　见到讨论函数零点或方程实根或两曲线交点的存在性问题，就要先找函数，再定区间，然后用介值定理或罗尔定理 . 若还要研究零点个数及位

置，则必用函数的单调性以及极值、最值处理。

定式解读　方程实根或两曲线交点问题都可通过辅助函数转化为函数零点问题，而此处的辅助函数很好构造：对于方程实根问题，只要把方程恒等变形为 F（x）=0，则 F（x）即为辅助函数；而对于曲线 $y=f$（x）与 $y=g$（x）的交点问题，辅助函数为 F（x）$=f$（x）$-g$（x），然后在相应区间上应用介值定理即可。如果构造辅助函数时用到了不定积分，则要用到罗尔定理 . 对于研究零点个数及位置问题，必然要通过研究辅助函数 F（x）的单调性和极值、最值，考查曲线 $y=F$（x）与 x 轴的交点个数及位置来确定，这实质上是函数 F（x）的图形描绘问题。

例 2　试就参数 $a>0$ 时的不同取值情况，确定方程 $x^3-3ax+a=0$ 在开区间（0，1）内实根的个数，并说明理由。

分析　本题的辅助函数和区间很显然 . 由于要研究实根个数，所以要把辅助函数的图形大致描绘出来，但只需单调性与极值，而不需要凹凸性与拐点，因而只需求一阶导数，然后根据 a 的不同取值进行讨论即可。

解 设 f（x）$=x3-3ax+a$，显然 f（x）在区间 [0，1] 上连续、可导，且 $f'(x)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$。

（1）当 $a\geqslant 1$ 时，f（x）在区间（0，1）内无驻点，且此时 f'（x）<0，而 f（0）$=a>0$，f（1）$=1-2a<0$，由零点定理可知，原方程在区间（0，1）内有惟一实根。

（2）当 $0<a<1$ 时，f（x）在区间（0，1）内有惟一驻点 $x=\sqrt{a}$，且当 $x\in(0,\sqrt{a})$时，$f'(x)<0$；$x\in(\sqrt{a},1)$时，f'（x）>0，可见 f（x）在 $x=\sqrt{a}$ 处取得极小值，也是 f（x）在区间 [0，1] 上的最小值，由此可想象出 f（x）的大致图形，进一步讨论如下。

①当 $f(\sqrt{a})=a(1-2\sqrt{a})>0$，即 $0<a<\dfrac{1}{4}$ 时，f（x）在区间（0，1）内无零点，此时原方程在区间（0，1）内无实根；

②当 $f(\sqrt{a})=a(1-2\sqrt{a})=0$，即 $a=\dfrac{1}{4}$ 时，f（x）在区间（0，1）内有惟一零点，此时原方程在区间（0，1）内只有一个实根；

③当 $f(\sqrt{a})=a(1-2\sqrt{a})<0$，且 $f(1)=1-2a>0$，即 $\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{2}$ 时，f（x）在区间

https://doi.org/10.35534/tms.0201001

（0，1）内有两个零点，此时原方程在区间（0，1）内有两个实根，分别位于区间$(0,\sqrt{a})$与$(\sqrt{a},1)$之间；

④当$f(\sqrt{a})=a(1-2\sqrt{a})<0$，且$f(1)=1-2a\leqslant 0$，即$\frac{1}{2}\leqslant a<1$时，$f(x)$在区间（0，1）内只有一个零点，此时原方程在区间（0，1）内只有一个实根。

2.3　定积分简化计算问题

解题定式 3　见到积分区间关于原点对称的定积分，就要想到考查被积函数及其代数和的每一部分是否具有奇偶性；见到被积函数为周期函数的定积分，就要想到考查积分区间是否为整数倍的周期，以简化计算。

定式解读　由于定积分概念产生的实际背景之一是平面图形的面积，而且当被积函数具有奇偶性或周期性时，又可分别考查积分区间是否关于原点对称或是否为被积函数周期的整数倍，这样充分利用几何直观解题，既提高了效率，又增加了趣味性，有助于学生的理解与把握．同理，重积分和曲线、曲面积分中，当其积分区域关于某坐标轴或坐标面对称而被积函数具有相应的奇偶性时，亦有类似的简化手段。

例 3　计算定积分$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(1+\sin 2x)|\cos x|dx$。

解　显然被积函数$f(x)=(1+\sin 2x)|\cos x|$是以π为周期的函数，而积分区间长度为2π，故

$$I=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin 2x)|\cos x|dx$$

而其中$\sin 2x\cdot|\cos x|$为奇函数，进而

$$I=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos x|dx=4$$

3　结束语

概括总结这些解题定式并非要束缚学生的思维，而是想抛砖引玉，引起其共鸣，让他们学会分析问题、解决问题的具体方法。达尔文曾说过“最有价值的知识是关于方法的知识”，所以这些解题定式不仅有助于学生解题能力的提高，

而且对于激发学生兴趣和热情、学好数学可起到积极的促进作用。

参考文献

[1] 同济大学应用数学系. 高等数学[M]. 北京：高等教育出版社，2002.
[2] 王莉. 考研数学复习教程（高等数学分册）[M]. 北京：高等教育出版社，2012.

https://doi.org/10.35534/tms.0201001